RELACIÓN DE PROBLEMAS
DE
CINEMÁTICA DE MECANISMOS

Asignatura: Teoría de Máquinas
Curso: Tercero

Antonio Javier Nieto Quijorna
Febrero 2007

CONTENIDOS

1. GRADOS DE LIBERTAD…………………………………….1

2. ANÁLISIS DE POSICIÓN. Métodos gráficos………………..9

3. ANÁLISIS DE POSICIÓN. Métodos analíticos……………..32

4. ANÁLISIS DE VELOCIDAD. Métodos gráficos……………43

5. ANÁLISIS DE VELOCIDAD. Métodos analíticos…………..56

6. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN. Métodos gráficos…………67

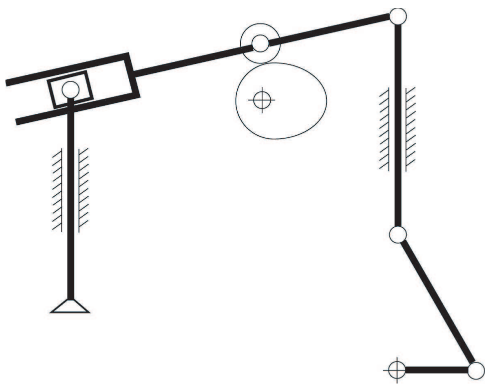
7. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN. Métodos analíticos………..81

Capítulo 1

GRADOS DE LIBERTAD.

1.1. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de guiado de la válvula (barra 9) de un motor de combustión interna. Identificar las barras que componen dicho mecanismo así como los pares cinemáticas. Determinar también el número de grados de libertad.



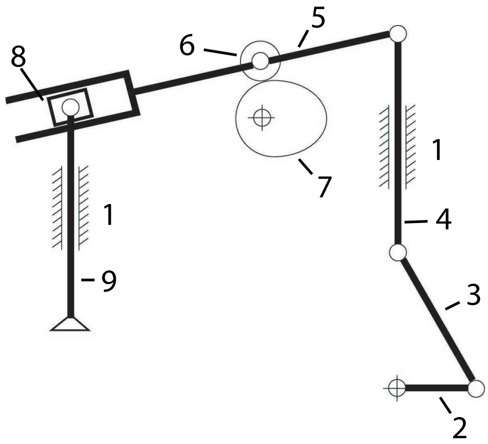
Resolución

Resolvemos el problema con la ecuación de grados de libertad de Kutzbach para un mecanismo con movimiento plano:

$$n = 3 \cdot (n_b - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2$$

Siendo n_b el numero de barras, p_1 los pares cinemáticos que admiten un grado de libertad y p_2 los pares cinemáticos que admiten dos grados de libertad.

Numeramos las barras como se muestra en la figura:



número de barras: 9

pares cinemáticos de tipo 1: 10(7 cilíndricos y 3 prismáticos)

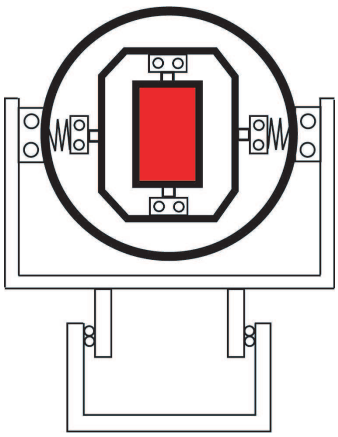
pares cinemáticos de tipo 2: 1 (entre las piezas 6 y 7)

Aplicando estos valores a la fórmula para obtener el siguiente resultado:

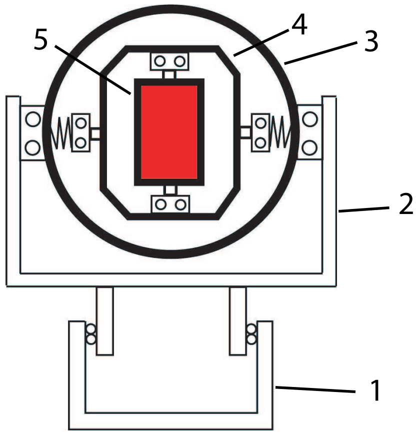
$$n = 3\,(9-1) - 2 \cdot 10 - 1 = 3$$

1.2. PROBLEMA.

La figura muestra un mecanismo para captación de imágenes mediante cámaras CCD (cuerpo rojo). Identificar el número de barras del mecanismo, pares cinemáticos y grados de libertad.



Resolución



número de barras: 5

pares cinemáticos de tipo 1: 4 (entre 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5)

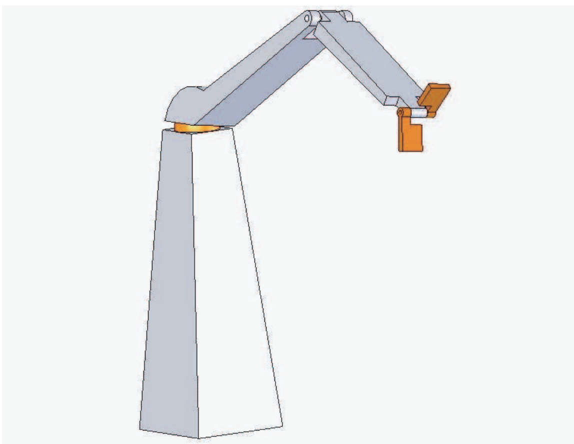
pares cinemáticos de tipo 2: 0

$$n = 3 \cdot (n_b - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2$$

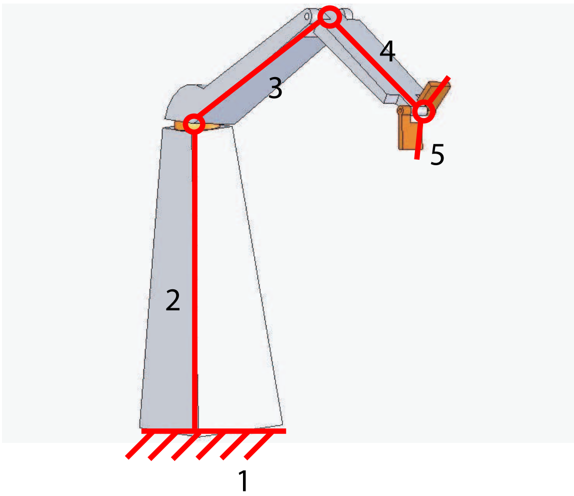
$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 4 - 0 = 4$$

1.3. PROBLEMA.

La figura muestra un brazo robotizado para captación de objetos mediante pinzas. Identificar el número de barras del mecanismo, así como los pares cinemáticos y grados de libertad.



Resolución



Aplicamos la expresión de Kutzbach para el caso de tres dimensiones:

$$n = 6 \cdot (n_b - 1) - 5 \cdot p_1 - 4 \cdot p_2 - 3 \cdot p_3 - 2 \cdot p_4 - p_5$$

número de barras: 5

pares cinemáticos de tipo 1: 3 (entre 3 y 4, 4 y 5(un por cada brazo de la pinza))

pares cinemáticos de tipo 2: 0

pares cinemáticos de tipo 3: 1 (entre 2 y 3)

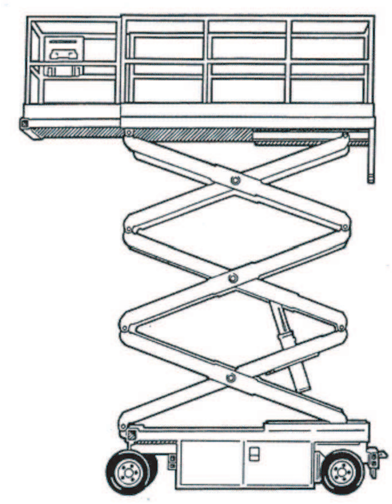
pares cinemáticos de tipo 4: 0

pares cinemáticos de tipo 5: 0

$$n = 6 \cdot (5 - 1) - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 6$$

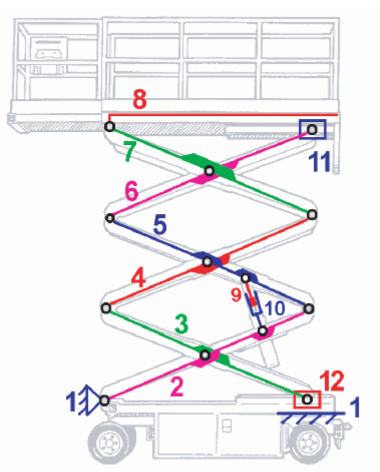
1.4. PROBLEMA.

La figura muestra una plataforma elevadora con un mecanismo de tijera ayudado por un actuador hidráulico. Determinar el número de barras, pares cinemáticos y grados de libertad.



Resolución

Una primera posibilidad es hacer la siguiente configuración de barras:



número de barras: 12

pares cinemáticos de tipo 1:

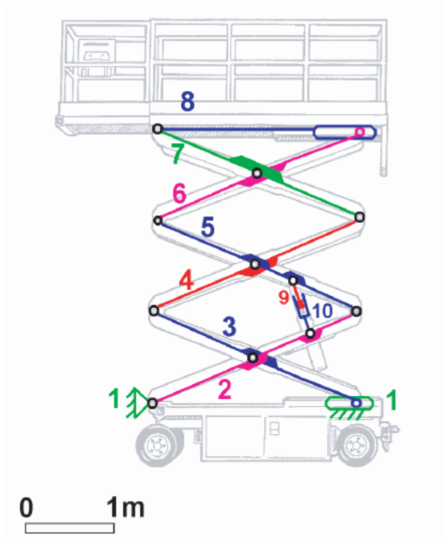
13 de rotación (entre 1 y 2, 2 y 3, 2 y 10, 2 y 5, 3 y 4, 3 y 12, 4 y 5, 4 y 7, 5 y 6, 5 y 9, 6 y 7, 6 y 11, 7 y 8)
3 pares prismáticos (entre 1 y 12, 8 y 11, 9 y 10)

pares cinemáticos de tipo 2: 0

$$n = 3 \cdot (n_b - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2$$

$$n = 3\,(12-1) - 2 \cdot 16 - 0 = 1$$

Otra forma de resolver este problema es con la siguiente configuración de barras:



número de barras: 10

pares cinemáticos de tipo 1:

11 de rotación (entre 1 y 2, 2 y 3, 2 y 10, 2 y 5, 3 y 4, 4 y 5, 4 y 7, 5 y 6, 5 y 9, 6 y 7, 7 y 8)
2 pares prismáticos (entre 9 y 10)

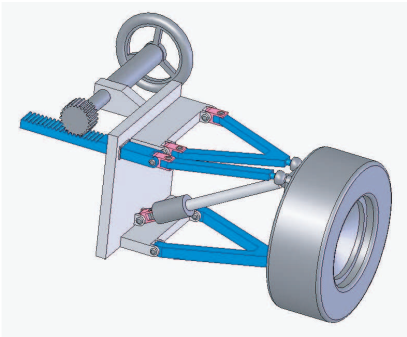
pares cinemáticos de tipo 2: 2(entre 3 y 11, 8 y 6)

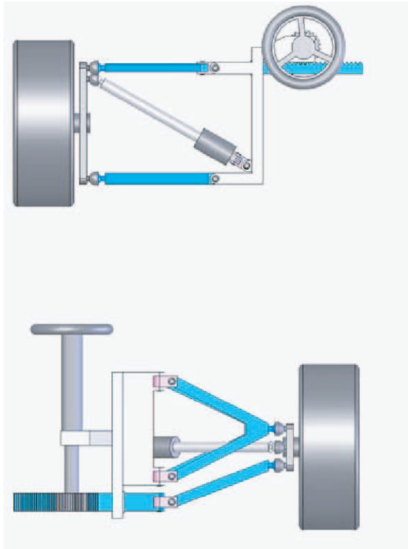
$$n = 3 \cdot (n_b - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2$$

$$n = 3\,(10-1) - 2 \cdot 13 - 2 = 1$$

1.5. PROBLEMA.

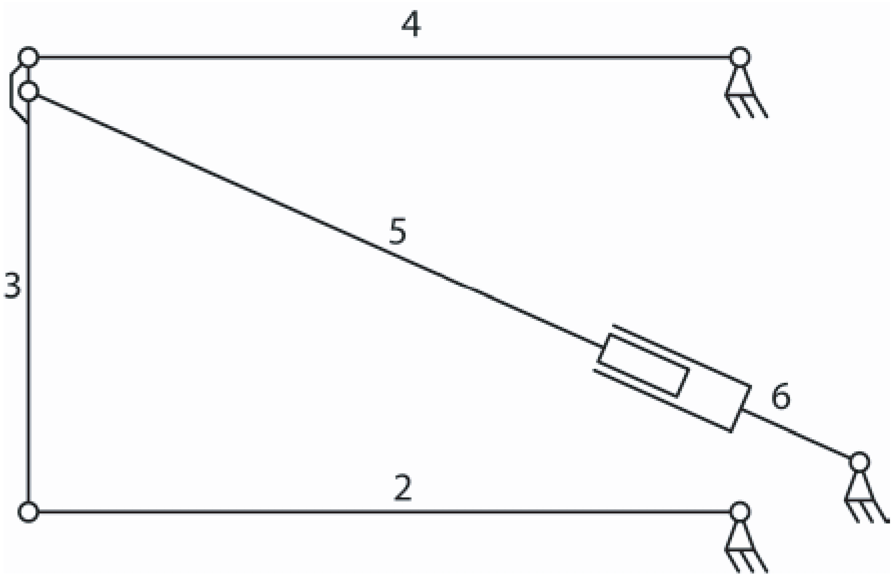
La figura muestra el mecanismo de suspensión de un vehículo monoplaza. Representar el esquema de dicha suspensión tanto en planta (mecanismo de dirección) como en alzado (mecanismo de suspensión). Determinar en cada caso en número de grados de libertad.





Resolución

Representamos en primer lugar el esquema de la suspensión:



número de barras: 6

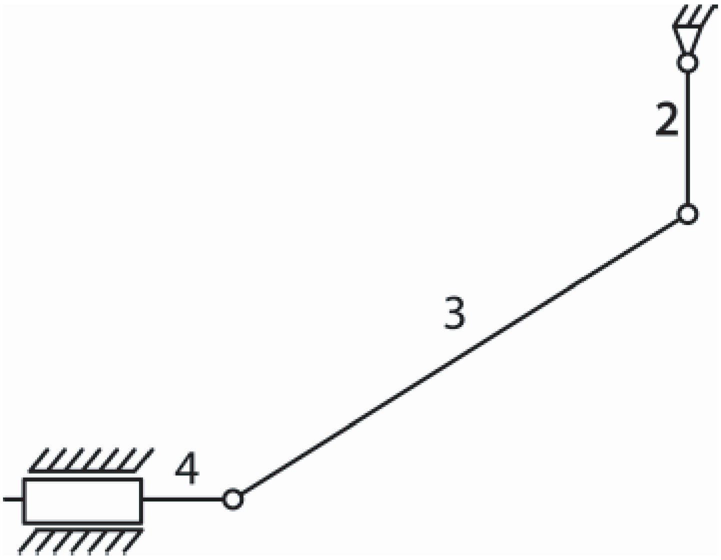
pares cinemáticos de tipo 1: 7 (6 de revolución y 1 prismático(entre 5 y 6))

pares cinemáticos de tipo 2: 0

$$n = 3 \cdot (n_b - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2$$

$$n = 3\,(6 - 1) - 2 \cdot 7 - 0 = 1$$

En segundo lugar hacemos el esquema de la dirección:



número de barras: 4

pares cinemáticos de tipo 1: 4 (3 de revolución y 1 prismático(entre 1 y 4))

pares cinemáticos de tipo 2: 0

$$n = 3 \cdot (n_b - 1) - 2 \cdot p_1 - p_2$$

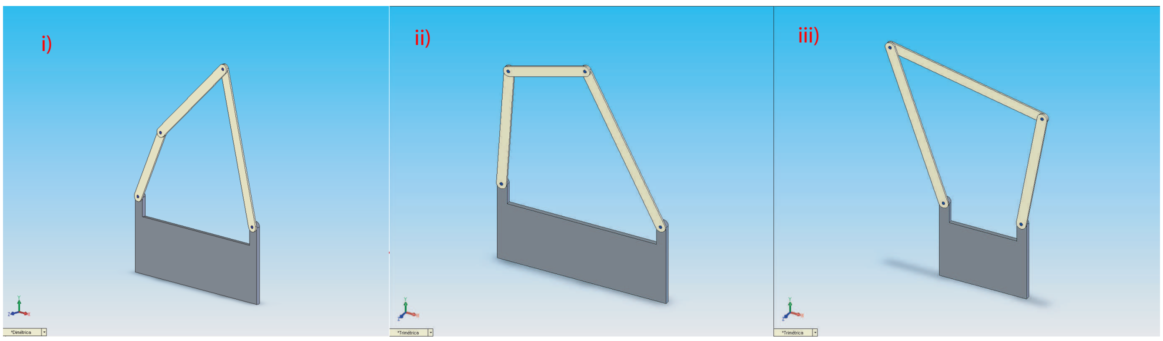
$$n = 3\,(4 - 1) - 2 \cdot 4 - 0 = 1$$

Capítulo 2

ANÁLISIS DE POSICIÓN. Método gráfico.

2.1. PROBLEMA.

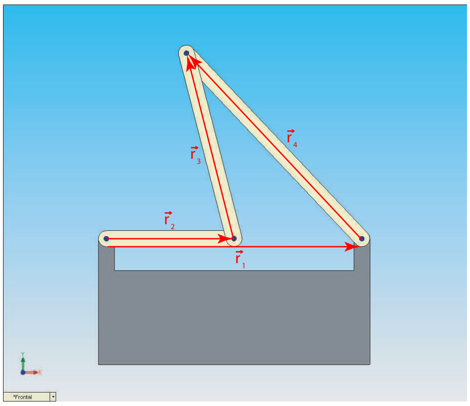
En la figura se muestra un mecanismo de cuatro barras. Realizar el análisis de posición para seis posiciones distintas de la barra de entrada, para los siguientes valores de las barras:
$i)$ $L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.
$ii)$ $L_1 = 3m$, $L_2 = 2m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.
$iii)$ $L_1 = 4m$, $L_2 = 4m$, $L_3 = 3m$, $L_4 = 2m$.



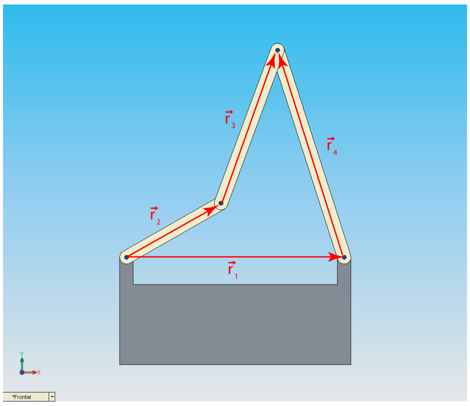
Resolución

$i)$ $L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.

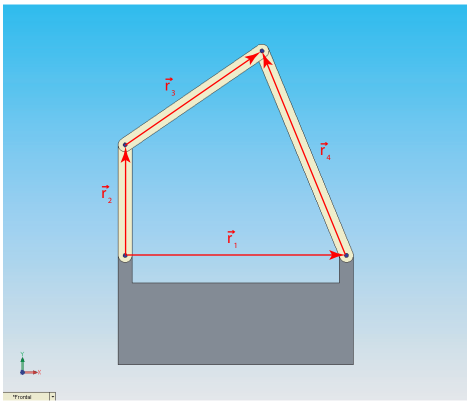
$$\theta_e = 0rad$$



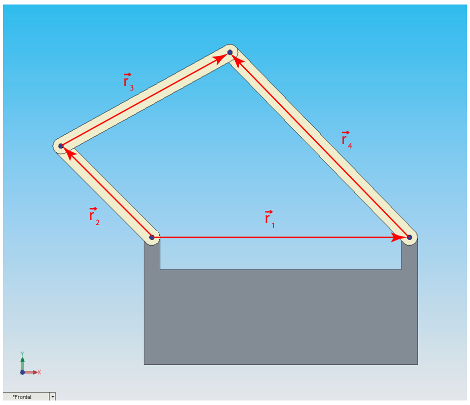
$\theta_e = \pi/6 rad$



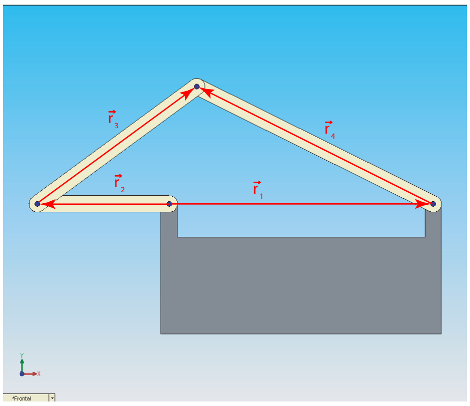
$\theta_e = \pi/2 rad$



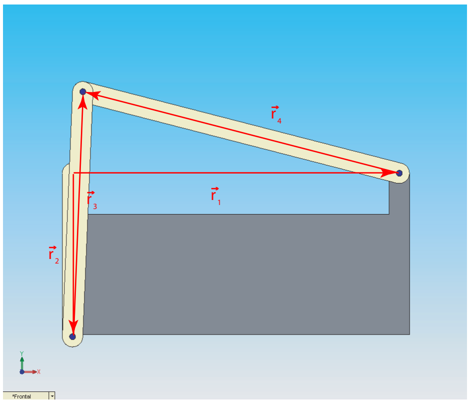
$\theta_e = 3\pi/4 rad$



$$\theta_e = \pi rad$$

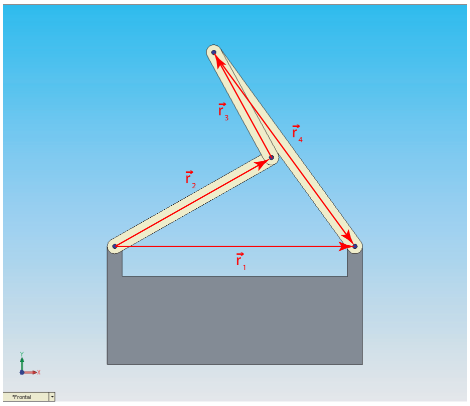


$$\theta_e = 3\pi/2rad$$

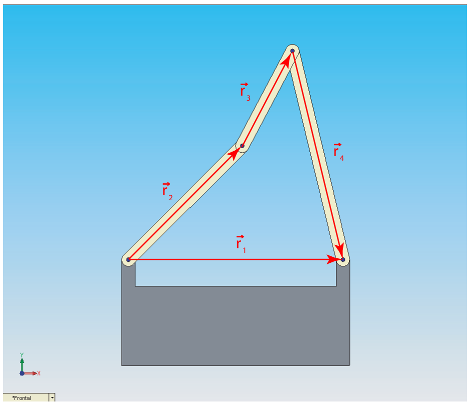


$ii)$ $L_1 = 3m$, $L_2 = 2m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.

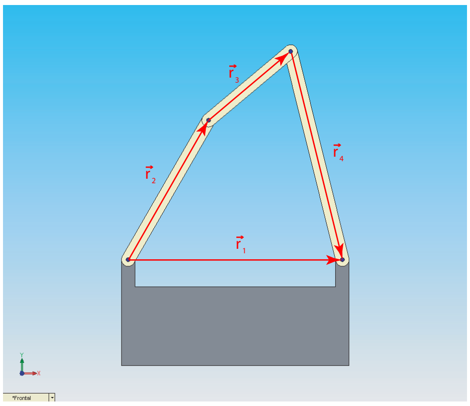
$$\theta_e = \pi/6rad$$



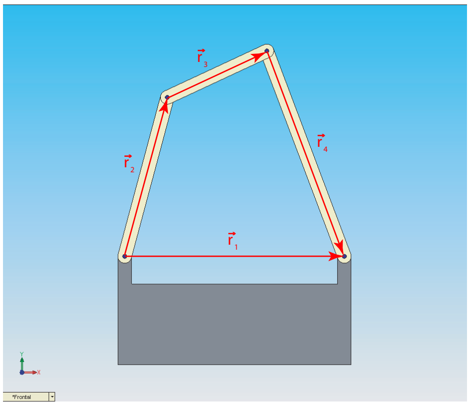
$$\theta_e = \pi/4rad$$



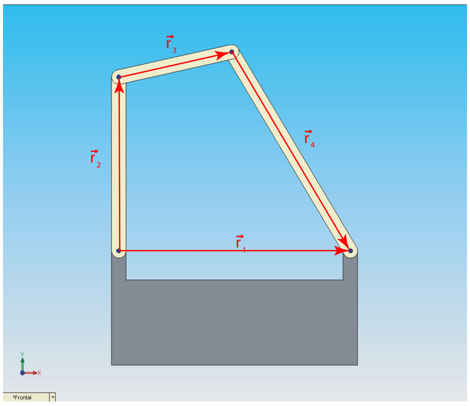
$$\theta_e = \pi/3rad$$



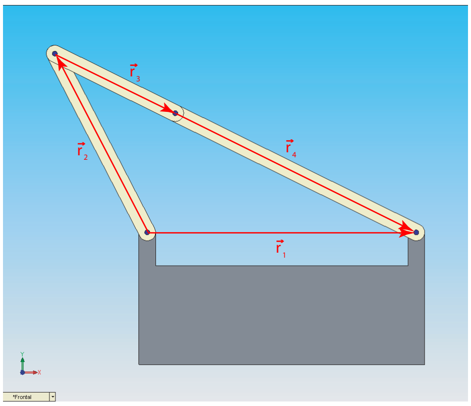
$$\theta_e = 0{,}416\pi rad$$



$$\theta_e = \pi/2rad$$

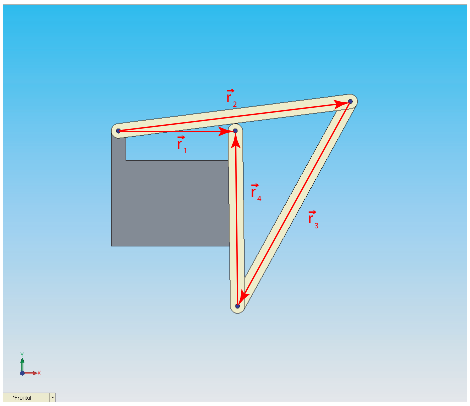


$$\theta_e = 0{,}65\pi rad$$

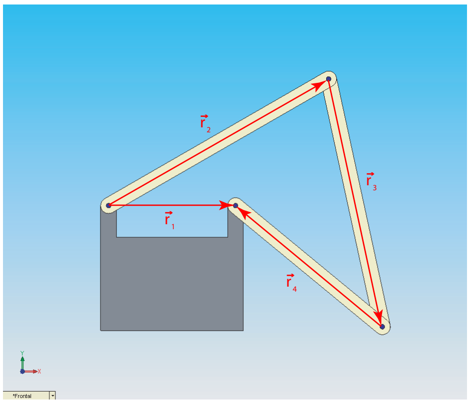


$iii)$ $L_1 = 4m$, $L_2 = 4m$, $L_3 = 3m$, $L_4 = 2m$.

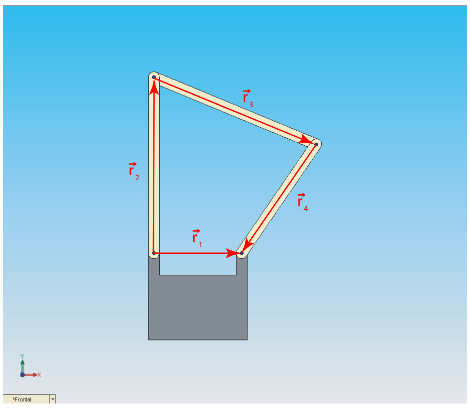
$$\theta_e = 0{,}0389\pi rad$$



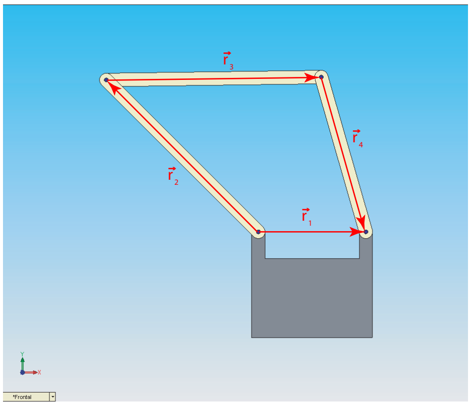
$\theta_e = \pi/6rad$



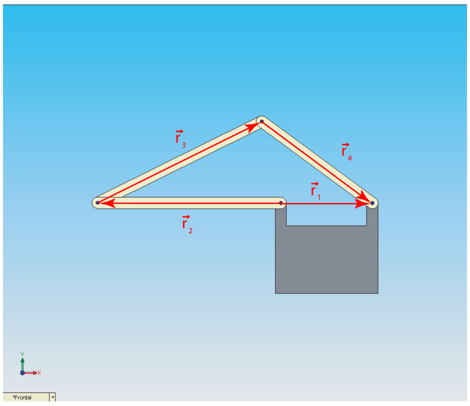
$\theta_e = \pi/2rad$



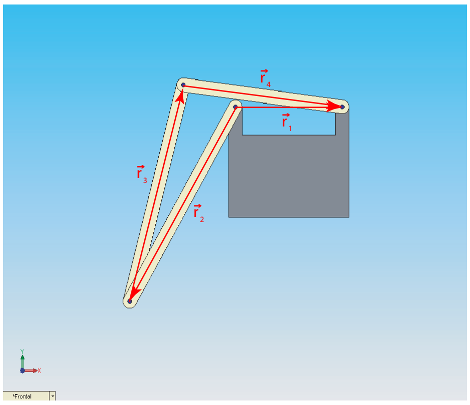
$\theta_e = 3\pi/4rad$



$$\theta_e = \pi rad$$

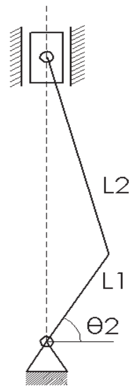


$$\theta_e = 4\pi/3 rad$$



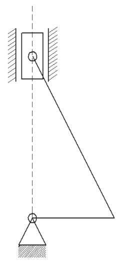
2.2. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo biela-manivela. Determinar la posición de las barras, imponiendo 6 posiciones a la barra de entrada. Datos: L1 = 2; L2 = 4.

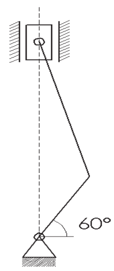


Resolución

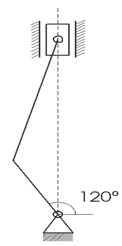
$$\theta_e = 0rad$$



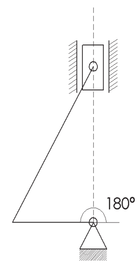
$$\theta_e = \pi/3rad$$



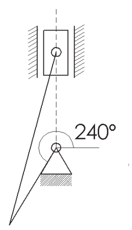
$$\theta_e = 2\pi/3rad$$



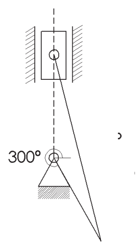
$$\theta_e = \pi rad$$



$$\theta_e = 4\pi/3 rad$$

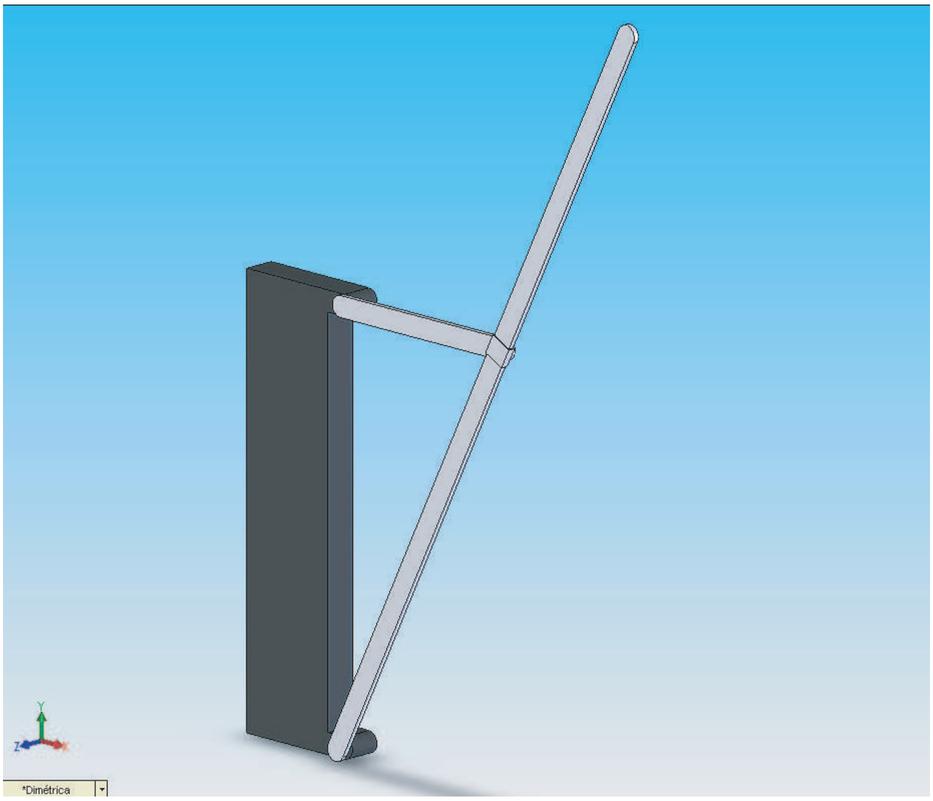


$$\theta_e = 5\pi/3 rad$$



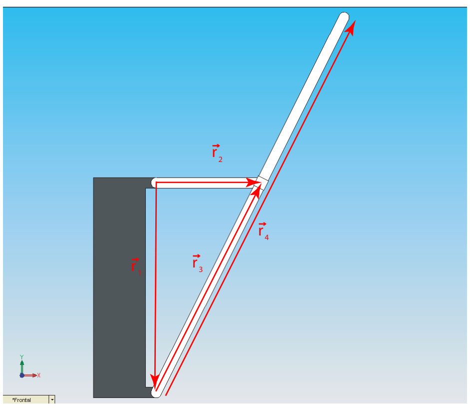
2.3. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de retorno rápido. Realizar el análisis de posición para seis posiciones distintas de la barra de entrada. Las dimensiones son barra de entrada 2 m, distancia entre centros 4 metros, barra 3 8 m.

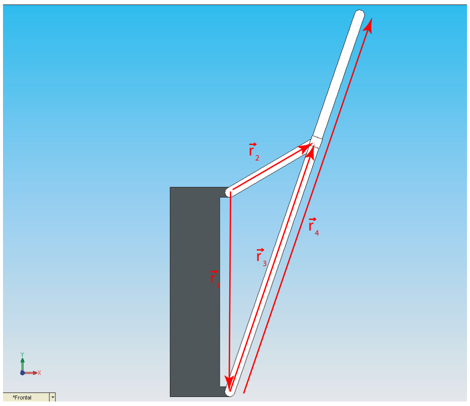


Resolución

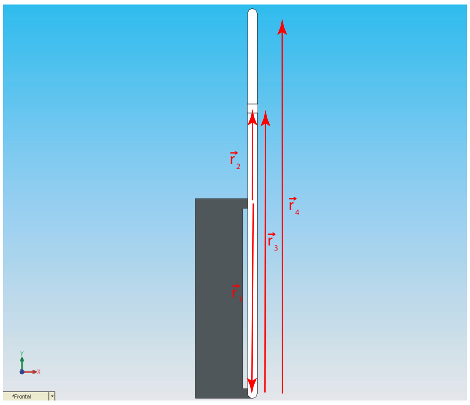
$$\theta_e = 0 rad$$



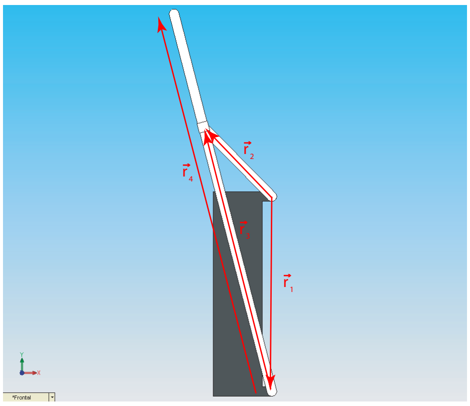
$$\theta_e = \pi/6 rad$$



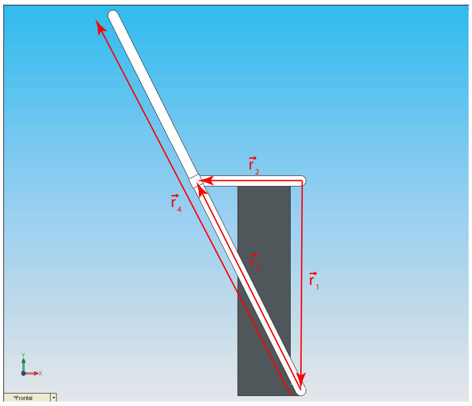
$$\theta_e = \pi/2 rad$$



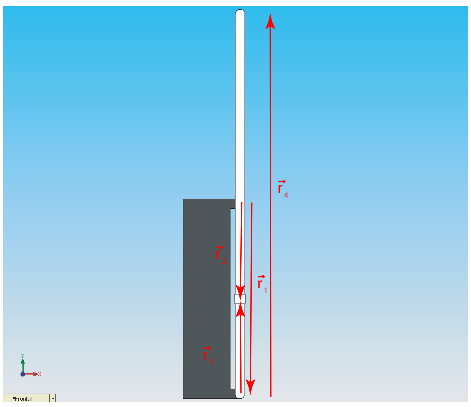
$$\theta_e = 3\pi/4 rad$$



$$\theta_e = \pi rad$$

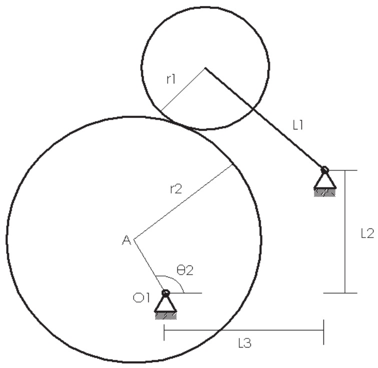


$$\theta_e = 3\pi/2 rad$$



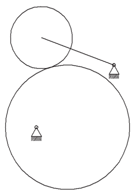
2.4. PROBLEMA.

La figura muestra una leva excéntrica. Realizar el análisis de posición gráfico para 6 posiciones de la barra de entrada. Datos: R1 = 2; L1 = 5; R2 = 4; L2 = 4; O1A = 2; L3 = 5.

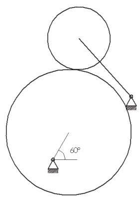


Resolución

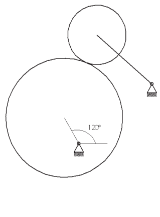
$$\theta_e = 0rad$$



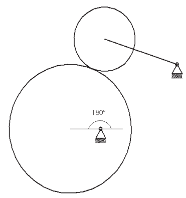
$$\theta_e = \pi/3rad$$



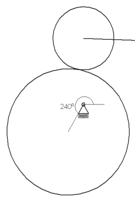
$$\theta_e = 2\pi/3rad$$



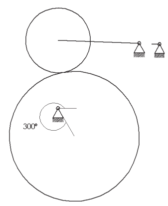
$$\theta_e = \pi rad$$



$$\theta_e = 4\pi/3 rad$$

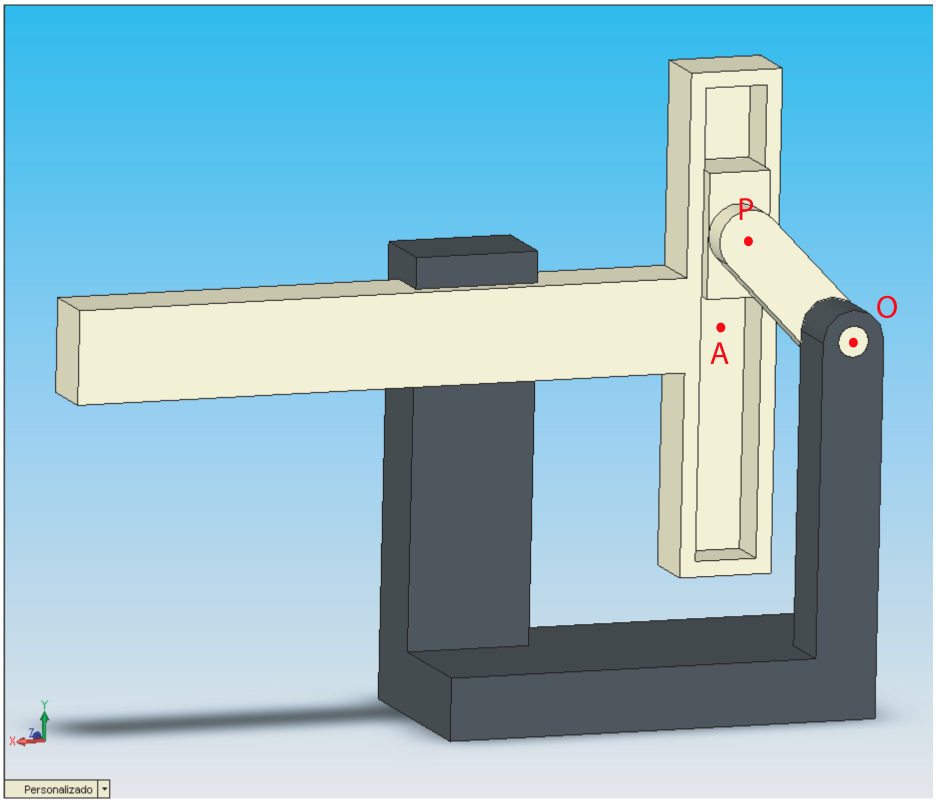


$$\theta_e = 5\pi/3 rad$$



2.5. PROBLEMA.

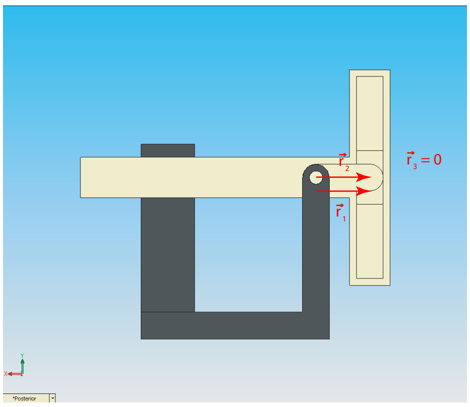
En la figura se muestra un yugo inglés. Realizar el análisis de posición para seis posiciones distintas de la barra de entrada. Las dimensiones son $\overline{OP} = 4$ m.



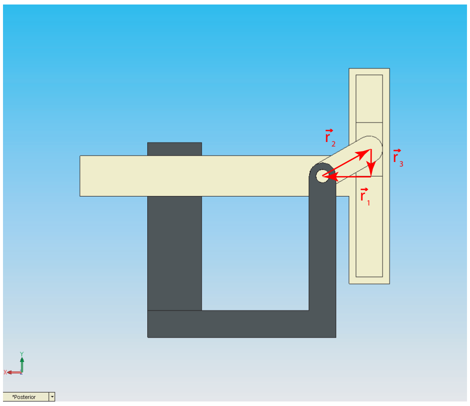
Resolución

Definimos los vectores $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ y $\vec{r_3}$ de la siguiente forma:
$\vec{r_1} = \overrightarrow{AO}$
$\vec{r_2} = \overrightarrow{OP}$
$\vec{r_3} = \overrightarrow{PA}$

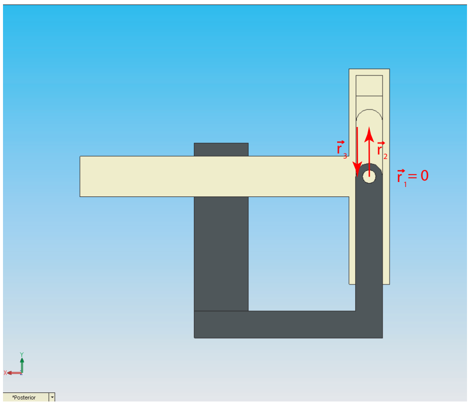
$$\theta_e = 0rad$$



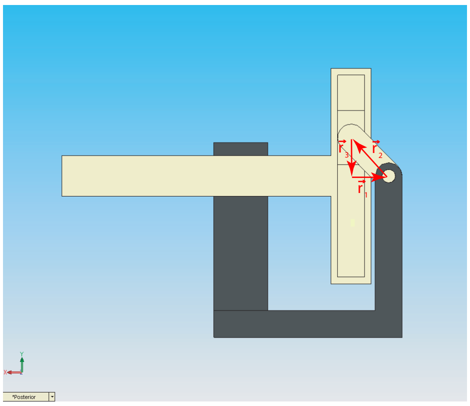
$$\theta_e = \pi/6rad$$



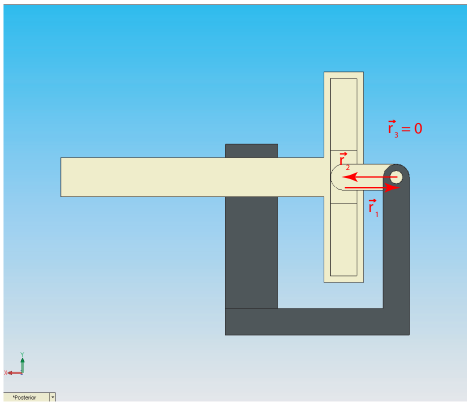
$\theta_e = \pi/2 rad$



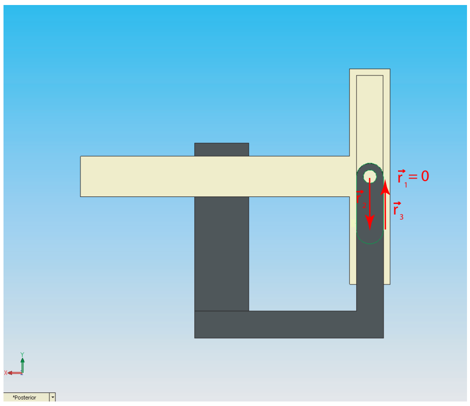
$\theta_e = 3\pi/4 rad$



$\theta_e = \pi rad$

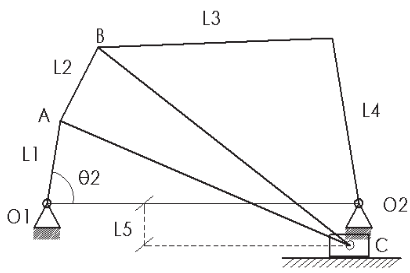


$$\theta_e = 3\pi/2rad$$



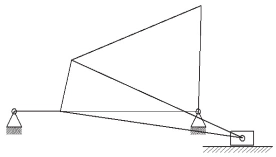
2.6. PROBLEMA.

Determinar gráficamente la posición de las barras del mecanismo que se muestra en la figura. Para ello, introduce 6 posiciones a la barra de entrada Datos: L1 = 2; O1O2 = 8; L2 = 2; AC = 8; L3= 6; BC = 8; L4 = 4; L5 = 1.

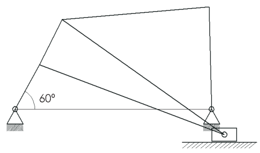


Resolución

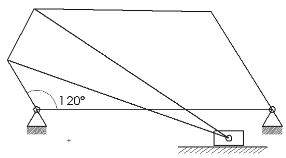
$$\theta_e = 0rad$$



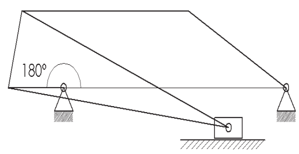
$$\theta_e = \pi/3rad$$



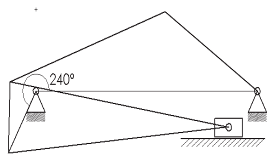
$$\theta_e = 2\pi/3rad$$



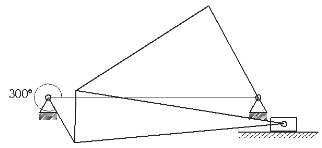
$$\theta_e = \pi rad$$



$$\theta_e = 4\pi/3rad$$



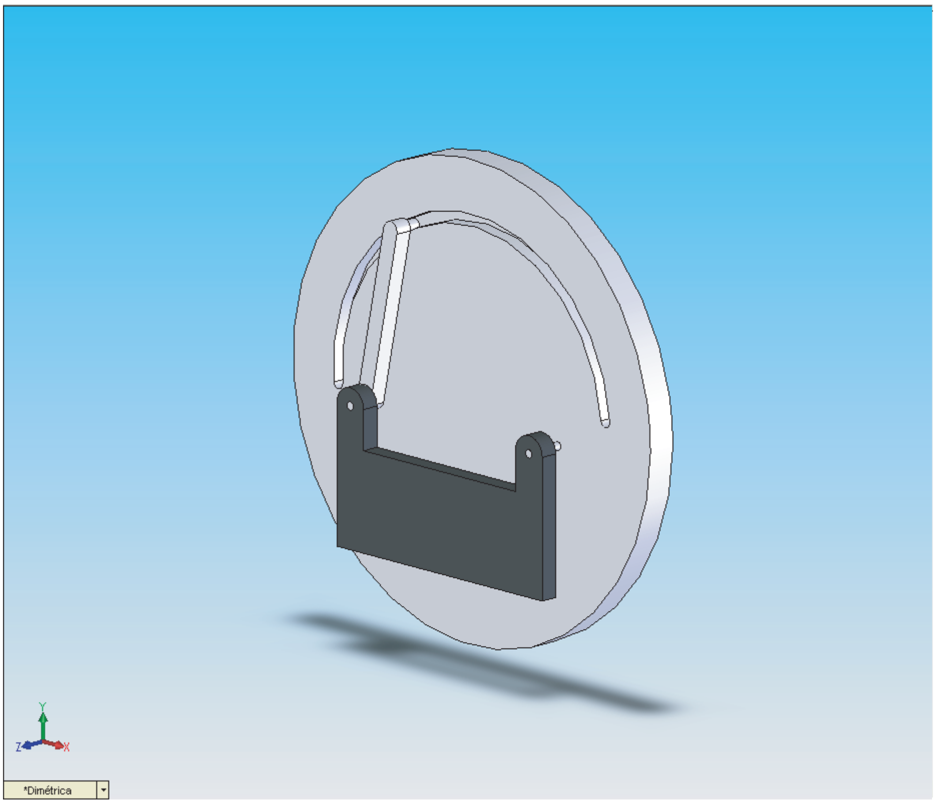
$$\theta_e = 5\pi/3rad$$



Resolución

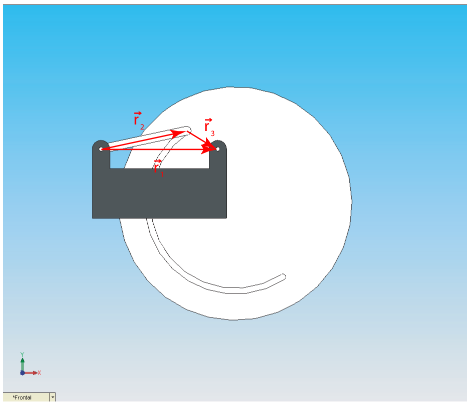
2.7. PROBLEMA.

En la figura se muestra una rueda escéntrica con una guía por donde se desplaza el bulón de barra 2. Realizar el análisis de posición para cuatro posiciones distintas de la barra de entrada. La longitud de la barra 2 es de 3 m, del centro de la rueda al punto sobre el que gira 2 m, y desde ese punto al centro de giro de la barra 2 hay 4 m.

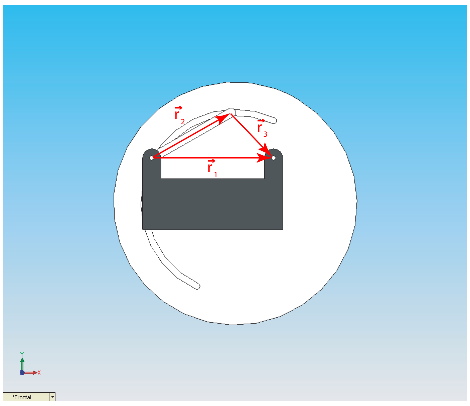


Resolución

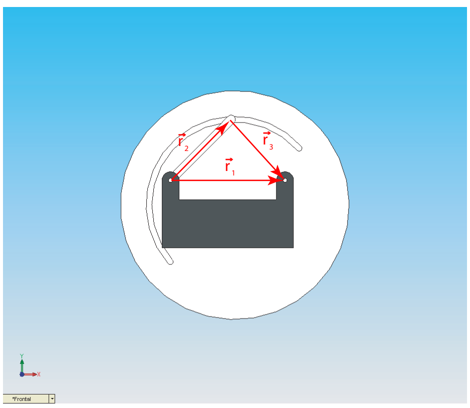
$$\theta_e = 0{,}06\pi rad$$



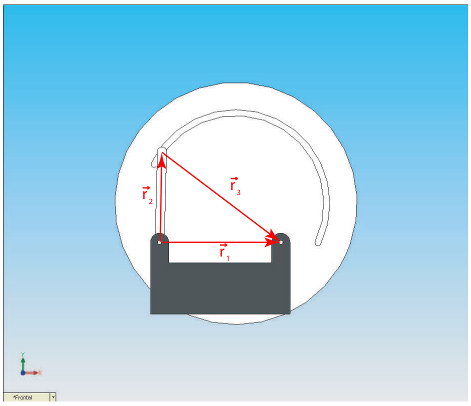
$$\theta_e = \pi/6rad$$



$$\theta_e = \pi/4rad$$

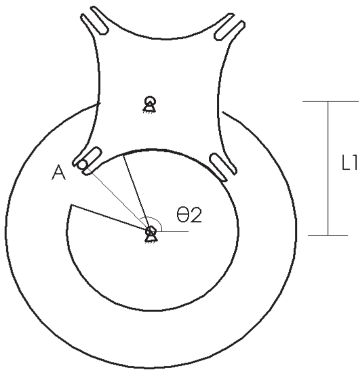


$$\theta_e = 0{,}48\pi rad$$



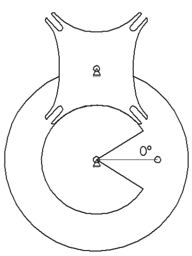
2.8. PROBLEMA.

La figura muestra la rueda de ginebra. Determinar su posición gráficamente, dando 6 posiciones a la barra de entrada. Datos: L1 = 3; O2A = 2.

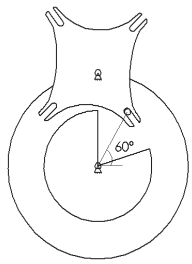


Resolución

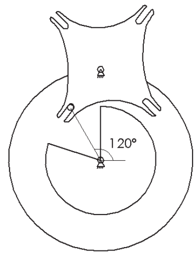
$$\theta_e = 0rad$$



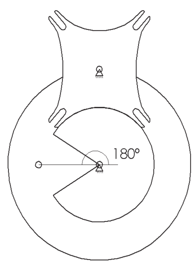
$$\theta_e = \pi/3rad$$



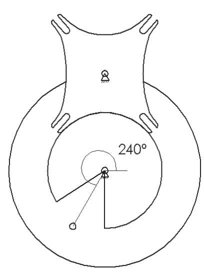
$\theta_e = 2\pi/3 rad$



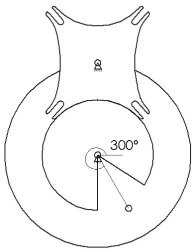
$\theta_e = \pi rad$



$\theta_e = 4\pi/3 rad$



$\theta_e = 5\pi/3 rad$

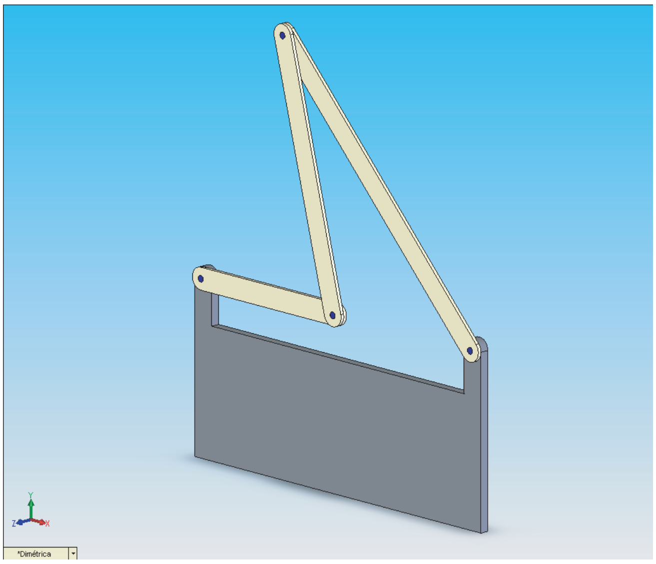

300°

Capítulo 3

ANÁLISIS DE POSICIÓN. Método analítico.

3.1. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de cuatro barras. Realizar el análisis de posición para un ángulo de entrada $\theta_2 = 0rad$ y las siguientes longitudes de las barras:
$L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.



Resolución

Si definimos un vector $\vec{r_k}$ como $\vec{r_k} = \rho_k \cdot e^{i\theta_k}$ el análisis de posición consiste en conocer los r_k y los θ_k, con $k = 1, 2, ...$ Para ello emplearemos razones y teoremas trigonométricos entre otras cosas.

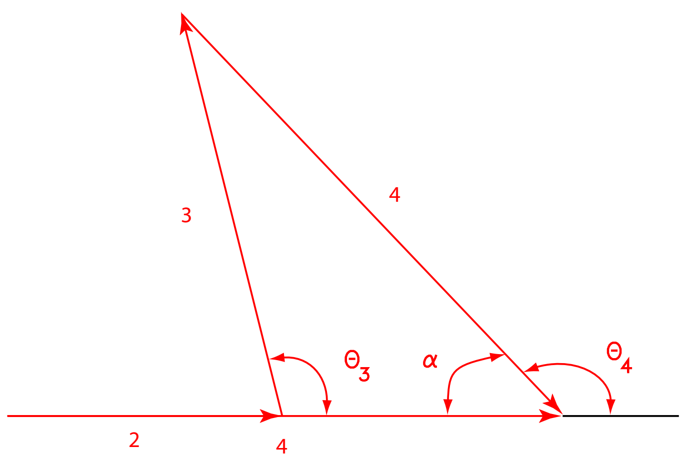
Los ρ_k son datos al igual que θ_2, por lo que nuestro problema consiste en hallar los ángulos: θ_1, θ_3 y θ_4.
Es obvio que $\theta_1 = 0$, $\forall t$ y unicamente tenemos que calcular θ_3 y θ_4.
Para obtener θ_3 vamos a emplear el teorema del coseno:

$$\cos\theta_3 = \frac{9+4-16}{2\cdot 3\cdot 2} \Rightarrow \theta_3 = 104{,}47^{\circ} = 0{,}58\cdot \pi rad$$

De igual forma hacemos para calcular θ_4:

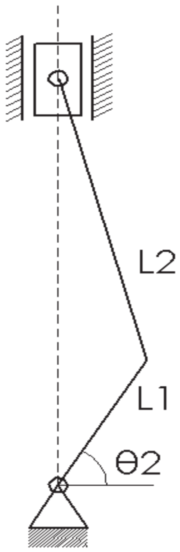
$$\cos\alpha = \frac{4+16-9}{2\cdot 2\cdot 4} \Rightarrow \alpha = 46{,}56^{\circ}$$

$$\theta_4 = 180^{\circ} - 46{,}56^{\circ} = 133{,}43^{\circ} = 0{,}74\cdot \pi rad$$

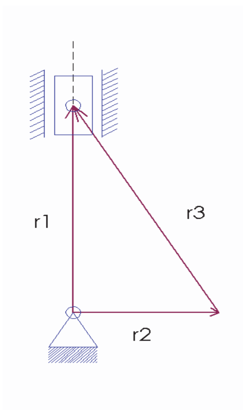


3.2. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo biela-manivela. Realizar el análisis de posición de forma analítica si el ángulo de entrada es $\theta_2 = 0^{\circ}$. Datos: $L1 = 2$ m, $L2 = 4$ m



Resolución



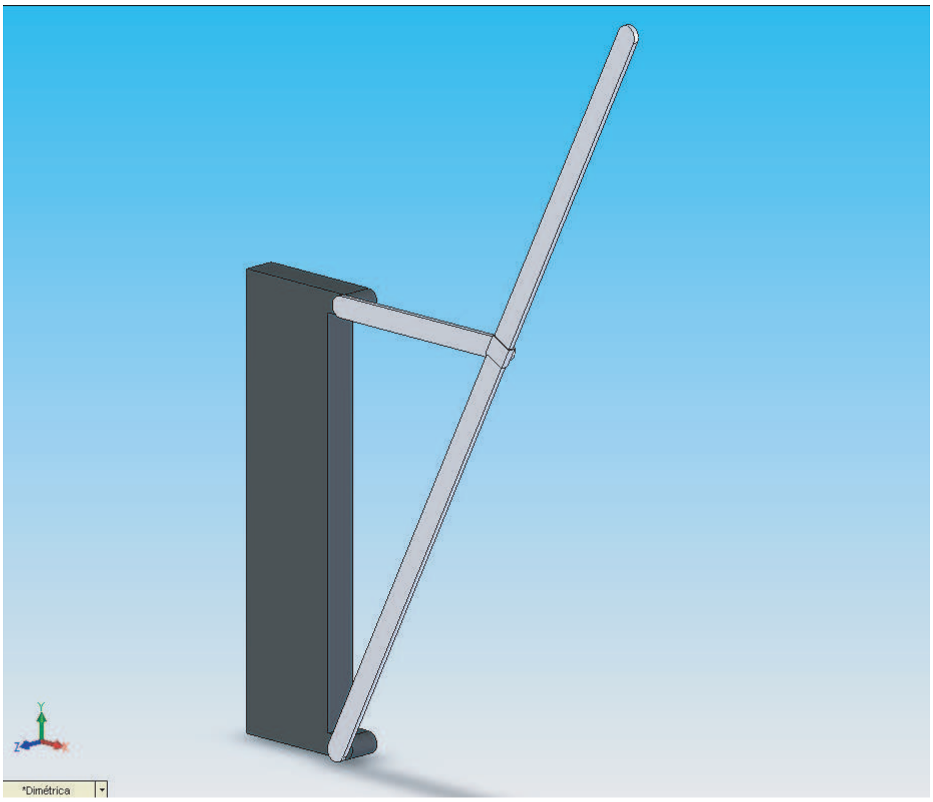
El resultado es muy sencillo e inmediato. Las longitudes de los vectores 2 y 3 coinciden con las longitudes de las barras 1 y 2 respectivamente y la del vector 3 la podemos calcular por el teorema de Pitágoras.
El ángulo del vector 2 es dato, 0º, y el del vector 1 se puede observar en el gráfico que es 90º, mientras que el del vector 3 es $180^o - \alpha$ siendo α el ángulo que forman los vectores 2 y 3. Este ángulo lo podemos calcular por el teorema del coseno. La solución es la siguiente:

$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho_3^2 \Rightarrow \rho_1 = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$
$\cos\alpha = \frac{\rho_2^2+\rho_3^2-\rho_1^2}{2\cdot\rho_2\cdot\rho_3} = \frac{4+16-12}{12} \Rightarrow \alpha = 60^o$
$\theta_3 = 180^o - \alpha = 120^o$

$\theta_1 = 90^o; \theta_2 = 0^o; \theta_3 = 120^o.$
$\rho_1 = 3{,}46m; \rho_2 = 2m; \rho_3 = 4m.$

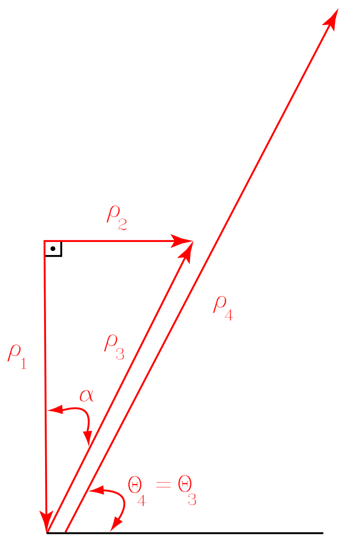
3.3. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de retorno rápido. Realizar el análisis de posición analíticamente para un ángulo de la barra de entrada de $\theta_2 = 0^o$. Las dimensiones son barra de entrada 2 m, distancia entre centros 4 metros, barra 3 8 m.



Resolución

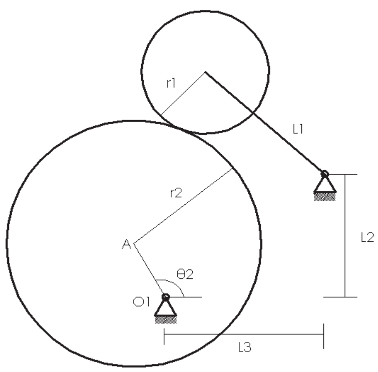
$\theta_2 = 0^o$, $\theta_1 = 270^o$, $\theta_3 =?$, $\theta_4 =?$.
$\rho_2 = 2m$, $\rho_1 = 4$, $\rho_3 =?$, $\rho_4 = 8$.



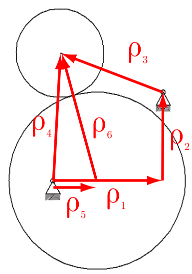
$$\cos 90 = \frac{4+16-\rho_3^2}{16} \Rightarrow \rho_3 = 4{,}47m$$
$$\cos\alpha = \frac{4^2+\rho_3^2-2^2}{8\rho_3} \Rightarrow \alpha = 26{,}57^o$$
$$\theta_3 = 90^o - 26{,}57^o = 63{,}42^o$$

3.4. PROBLEMA.

La figura muestra una leva excéntrica. Realizar el análisis de posición de forma analítica para un ángulo de entrada igual a 0°. Datos: $R1 = 2m$; $L1 = 5m$; $R2 = 4m$; $L2 = 4m$; $O1A = 2m$; $L3 = 5m$.



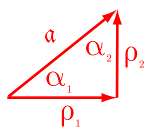
Resolución



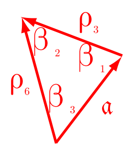
Según hemos definido los vectores conocemos los siguientes datos: módulos de los vectores 1, 2, 3, 5 y 6 y los ángulos de los vectores 1, 2 y 5.
El módulo del vector 6 es la suma de los radios de las dos ruedas.
Utilizamos los vectores 5 y 6 para definir al 4, ya que $\overrightarrow{r_4} = \overrightarrow{r_5} + \overrightarrow{r_6}$

Definimos un nuevo vector de módulo a y ángulo α_1 para poder obtener los ángulos que nos faltan.

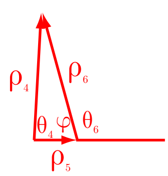
$$9 + 16 = a^2 \Rightarrow a = 5$$
$$\alpha_1 = ar\cos\frac{9+25-16}{30} = 53{,}13^o$$
$$\alpha_2 = ar\cos\frac{25+16-9}{40} = 38{,}86^o$$



$$\beta_1 = ar\cos\frac{25+25-36}{40} = 73{,}73^o$$
$$\beta_2 = ar\cos\frac{36+25-25}{60} = 53{,}13^o$$
$$\beta_3 = ar\cos\frac{36+25-25}{60} = 53{,}13^o$$
$$\theta_6 = \beta_3 + \alpha_1 = 106{,}26$$
$$\theta_3 = 360^o - 90^o - \beta_1 + \alpha_2 = 159{,}41^o$$



$$\varphi = 180^o - \theta_6 = 73{,}74^o$$
$$\cos\varphi = 0{,}2799 = \frac{4+36-\rho_4^2}{24} \Rightarrow \rho_4 = 5{,}768$$
$$\theta_4 = ar\cos\frac{4+33{,}28-36}{23{,}072} = 86{,}819^o$$

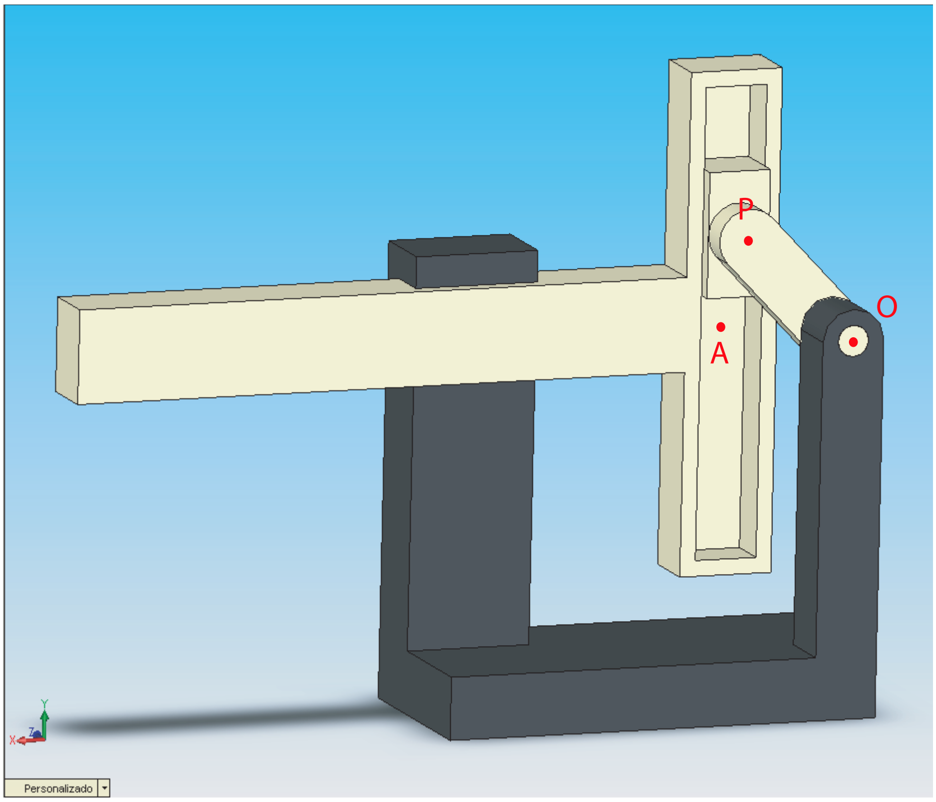


Solución:

$\theta_1 = 0^o$, $\theta_2 = 90^o$, $\theta_3 = 159{,}4^o$,$\theta_4 = 86{,}819^o$,$\theta_5 = 0^o$,$\theta_6 = 106{,}2^o$.
$\rho_1 = 5m$, $\rho_2 = 4m$, $\rho_3 = 5m$, $\rho_4 = 5{,}768m$, $\rho_5 = 2m$, $\rho_6 = 6m$.

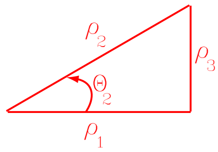
3.5. PROBLEMA.

En la figura se muestra un yugo inglés. Realizar el análisis de posición de manera analítica para un ángulo de la barra de entrada $\theta_2 = 30^o$. Las dimensiones son $\overline{OP} = 4$ m.



Resolución

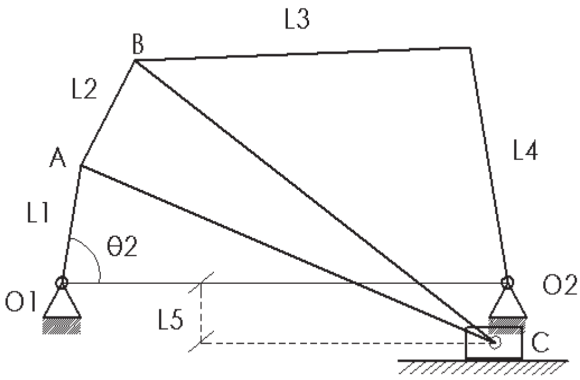
$\theta_2 = 30^o$, $\theta_1 = 180^o$, $\theta_3 = 270^o$.
$\rho_2 = 4m$, $\rho_1 =?$, $\rho_3 =?$.



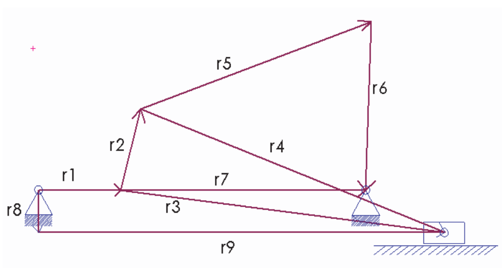
$\cos\theta_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho_1}{4} \Rightarrow \rho_1 = 3{,}464m$
$\sin\theta_2 = \frac{\rho_3}{\rho_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\rho_3}{4} \Rightarrow \rho_3 = 2m$

3.6. PROBLEMA.

Realizar el análisis de posición de forma analítica del mecanismo que se muestra en la figura para un ángulo de la barra de entrada de 0º. Datos: $L1 = 2m$, $O1O2 = 8m$, $L2 = 2m$, $AC = 8m$, $L3 = 6m$, $BC = 8m$, $L4 = 4m$, $L5 = 1m$.



Resolución



Tenemos que determinar 9 longitudes y 9 ángulos de los vectores dibujados en el gráfico.De las longitudes conocemos 6, y de los vectores 4, con lo que tenemos 18 - 10 = 8 incógnitas. Para resolverlas planteamos 8 ecuaciones escalares linealmente independientes.
$\rho_1 = 2m, \rho_2 = 2m, \rho_3 =?m, \rho_4 =?m, \rho_5 = 6m, \rho_6 = 4m, \rho_7 = 6m, \rho_8 = 1m, \rho_9 =?m.$
$\theta_1 = 0^o, \theta_2 =?^o, \theta_3 =?^o, \theta_4 =?^o, \theta_5 =?^o, \theta_6 =?^o, \theta_7 = 0^o, \theta_8 = -90^o, \theta_9 = 0^o.$

Planteamos las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\overrightarrow{r}_1 + \overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{r_8} + \overrightarrow{r_9}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} 2 + \rho_3 \cos\theta_3 = \rho_9 \\ \rho_3 \sin\theta_3 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$\overrightarrow{r}_2 + \overrightarrow{r_4} = \overrightarrow{r_3}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} 2\cos\theta_2 + \rho_4 \cos\theta_4 = \rho_3 \cos\theta_3 \\ 2\sin\theta_2 + \rho_4 \sin\theta_4 = \rho_3 \sin\theta_3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (3) \\ (4) \end{array}$$

$$\overrightarrow{r}_7 = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_5} + \overrightarrow{r_6}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} 6 = 2\cos\theta_2 + 6\cos\theta_5 + 4\cos\theta_6 \\ 0 = 2\sin\theta_2 + 6\sin\theta_5 + 4\sin\theta_6 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (5) \\ (6) \end{array}$$

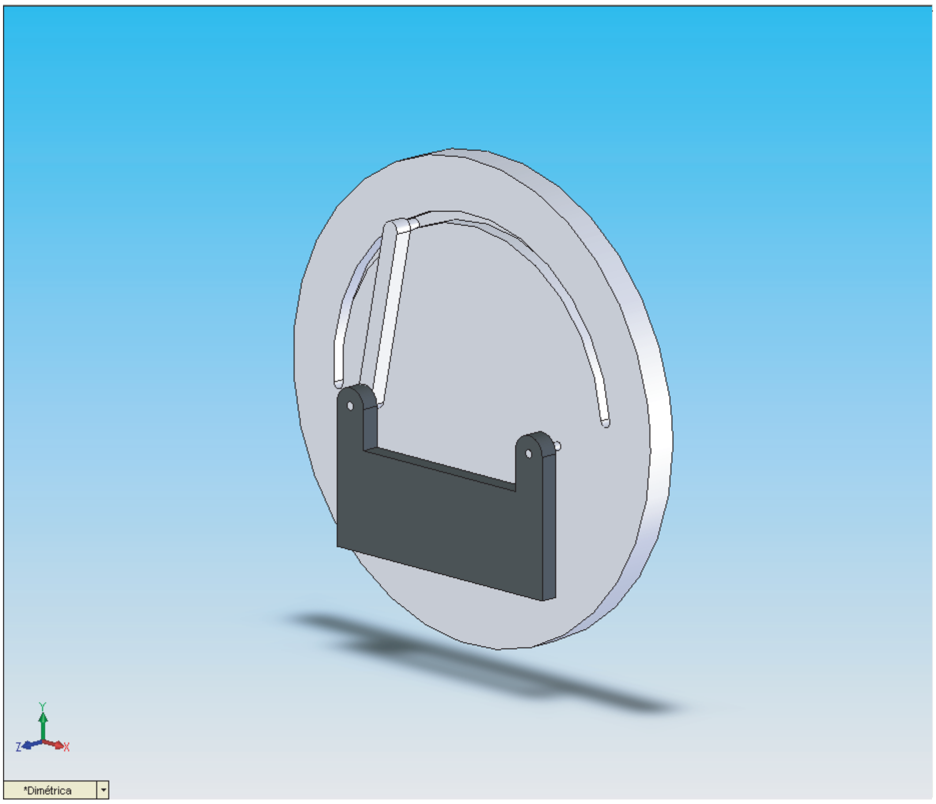
$$\overrightarrow{r}_8 + \overrightarrow{r}_9 = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_4}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \rho_9 = 2 + 2\cos\theta_2 + \rho_4 \cos\theta_4 \\ -1 = 2\sin\theta_2 + \rho_4 \sin\theta_4 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (7) \\ (8) \end{array}$$

Resolviendo el sistema con paciencia obtenemos lo siguiente:

$\rho_1 = 2m, \rho_2 = 2m, \rho_3 = 8m, \rho_4 = 8m, \rho_5 = 6m, \rho_6 = 4m, \rho_7 = 6m, \rho_8 = 1m, \rho_9 = 9{,}91m.$
$\theta_1 = 0^{\text{o}}, \theta_2 = 75{,}63^{\text{o}}, \theta_3 = 173{,}71^{\text{o}}, \theta_4 = 157{,}47^{\text{o}}, \theta_5 = 20{,}08^{\text{o}}, \theta_6 = 88{,}12^{\text{o}}, \theta_7 = 0^{\text{o}}, \theta_8 = -90^{\text{o}}, \theta_9 = 0^{\text{o}}.$

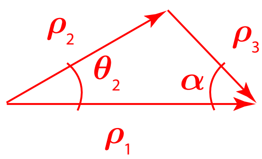
3.7. PROBLEMA.

En la figura se muestra una rueda escéntrica con una guía por donde se desplaza el bulón de barra 2. Realizar el análisis de posición de manera analítica siendo el ángulo de la barra de entrada $\theta_2 = 30^{\text{o}}$. La longitud de la barra 2 es de 3 m, del centro de la rueda al punto sobre el que gira 2 m, y desde ese punto al centro de giro de la barra 2 hay 4 m.



Resolución

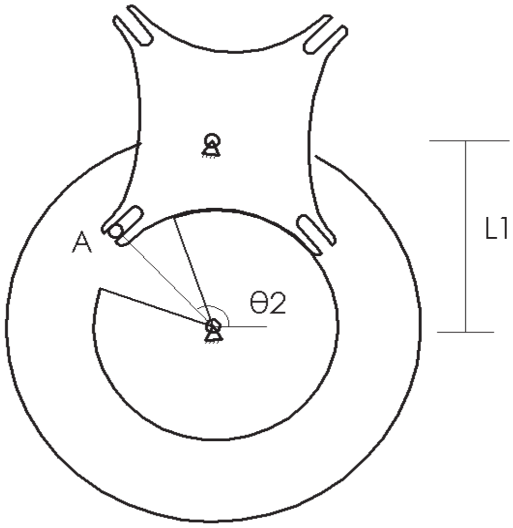
$\theta_2 = 30^o$, $\theta_1 = 0^o$, $\theta_3 =?$.
$\rho_2 = 3m$, $\rho_1 = 4$, $\rho_3 =?$.



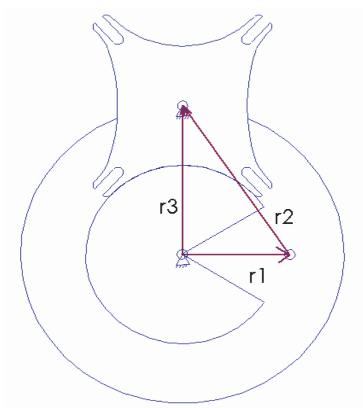
$$\cos\theta_2 = \frac{\rho_1^2+\rho_2^2-\rho_3^2}{2\rho_1\rho_2} \Rightarrow \sqrt{3}/2 = \frac{16+9-\rho_3^2}{24} \Rightarrow \rho_3 = 2{,}053m$$
$$\cos\alpha = \frac{2{,}053^2+4^2-3^2}{4\cdot 2\cdot 2{,}053} = 0{,}6828 \Rightarrow \alpha = 46{,}93^o$$
$$\theta_3 = 180^o - 46{,}93^o = 133{,}068^o$$

3.8. PROBLEMA.

La figura muestra la rueda de ginebra. Determinar el análisis de posición de forma analítica cuando el ángulo de entrada es 0^o.Datos: $L1 = 3m$; $O2A = 2m$.



Resolución



α es el ángulo que forman los vectores 1 y 2.

$$\rho_1^2 + \rho_3^2 = \rho_2^2 \Rightarrow \rho_2 = \sqrt{4^2 + 9^2} = 3{,}6055$$
$$\cos\alpha = \frac{\rho_1^2+\rho_2^2-\rho_3^2}{2\cdot\rho_1\cdot\rho_2} = \frac{4+9{,}394-9}{14{,}42} \Rightarrow \alpha = 72{,}25^{\text{o}}$$
$$\theta_2 = (180^{\text{o}} - \alpha) = 107{,}74^{\text{o}}$$

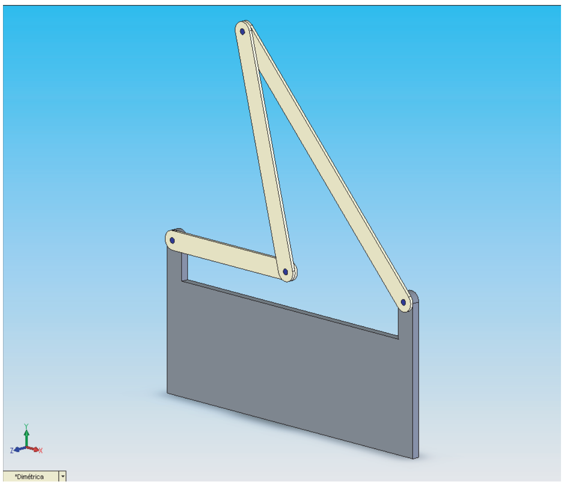
$$\theta_1 = 0^{\text{o}}; \theta_2 = 107{,}74^{\text{o}}; \theta_3 = 90^{\text{o}}.$$
$$\rho_1 = 2m; \rho_2 = 3{,}6055m; \rho_3 = 3m.$$

Capítulo 4

RELACIÓN 4. ANÁLISIS DE VELOCIDAD. Método Gráfico.

4.1. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de cuatro barras. Para un ángulo de entrada $\theta_2 = 0^o$ y velocidad de esta barra $\omega_2 = 1rad/s$ calcular la velocidad de la barra 4 (barra de salida). Las dimensiones son: $L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.



Resolución

Para realizar el análisis de velocidad de forma analítica tenemos que tener claras dos ecuaciones. La primera es que un punto A que gira alrededor de un centro O con un movimiento circular tiene una velocidad igual a:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{\omega} x \overrightarrow{AB}$$

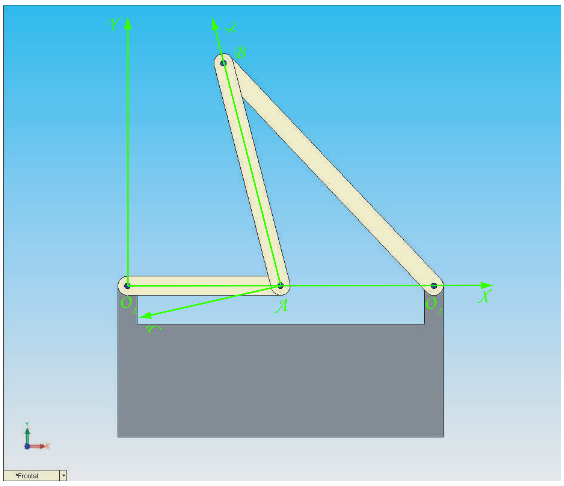
Y la segunda es la ecuación de velocidad de movimiento relativo:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_o} + \overrightarrow{\omega} x \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

Siendo $\overrightarrow{V_0}$ la velocidad del origen de los ejes de coordenadas intermedios, $\overrightarrow{\omega}$ la velocidad angular de los ejes intermedios,$\overrightarrow{OA}$ es la distancia entre el punto A y el origen de los ejes intermedios y $\vec{v}$ la velocidad relativa del punto A vista desde los ejes intermedios.

Una vez explicadas estas fórmulas solo tenemos que aplicarlas con criterio y resolver las incógnitas que se nos plantean.

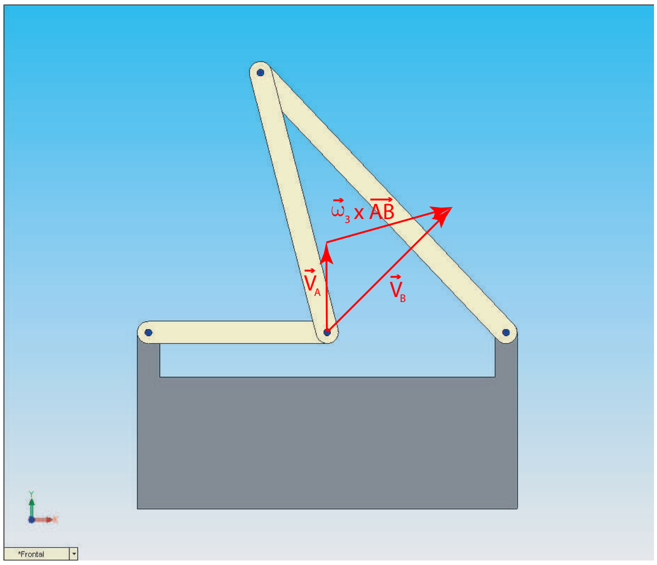
En este caso vamos a calcular la velocidad del punto A, que es el punto de unión de la barra 2 y la barra 3, de la que conocemos la dirección y el módulo, y también vamos a calcular la velocidad del punto B (punto de unión de la barra 3 y 4) con la ecuación de movimiento circular, en la que conoceremos la dirección, y la ecuación de movimiento relativo, en la que conocemos la dirección de la parte angular, y la dirección de la velocidad $\overrightarrow{V_B}$.
Para la ecuación del movimiento relativo vamos a colocar los ejes intermedios con centro en A y girando con la barra 3. Según estas indicaciones tenemos lo siguiente:



$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{O_1 A} \left\{ \begin{array}{c} direccion : perpendicular a \overrightarrow{O_1 A} \\ MoDulo : \left| \overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{O_1 A} \right| = 1 \cdot 2 = 2 \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{\omega_4} x \overrightarrow{O_2 B} \left\{ \begin{array}{c} direccion : perpendicular a \overrightarrow{O_2 B} \\ MoDulo :? \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{AB}}_{direccion: perpendicular a \overrightarrow{AB}} \left\{ \begin{array}{c} direccion : perpendicular a \overrightarrow{O_2 B} \\ MoDulo :? \end{array} \right\}$$

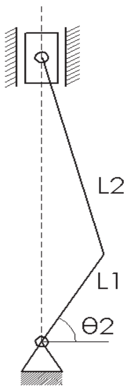


Una vez dibujamos las direcciones y módulos que tenemos obtenemos un triángulo con las tres velocidades. Para obtener el valor numérico de la velocidad solo tenemos que hacer una escala. Así por ejemplo, si la velocidad de entrada de la barra 2 en el dibujo mide 16.79 mm y en la realidad 1 m/s, con medir lo que vale en el papel la velocidad $\overrightarrow{V_B}$ ya sabremos su verdadero valor. La medida en el papel es 33.35mm y en la realidad:

$$| \overrightarrow{V_B} |= \frac{33{,}35 \cdot 2}{16{,}79} = 2{,}016 m/s$$

4.2. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo biela-manivela. Determinar la velocidad del pistón si tenemos un ángulo de entrada $\theta_2 = 45^o$ y una velocidad de entrada $\omega_2 = 1rad/s$. Datos: $L1 = 2m, L2 = 4m$.

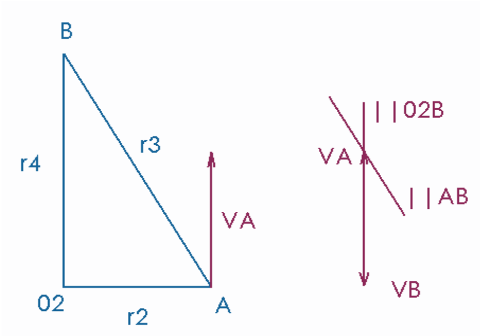


Resolución

$V_A = \omega_2 \times r_2$
$V_B = V_A + v$

$\omega_3 \times r_3 = 0$

De V_A conocemos su dirección y modulo (como $\omega_2 \times r_2$ son perpendiculares, se puede decir que $V_A = \omega_2 \times r_2$). De V_B su dirección (dirección vertical). De v su dirección (paralela AB).

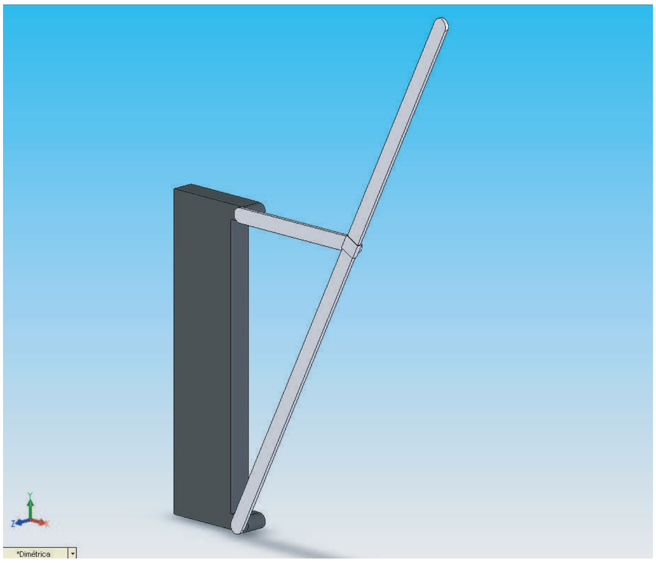


Midiendo y multiplicando por el factor de escala obtenemos:

$|V_P| = 1{,}95\ m/s$
$|\omega_3| = 0{,}379\ rad/s$

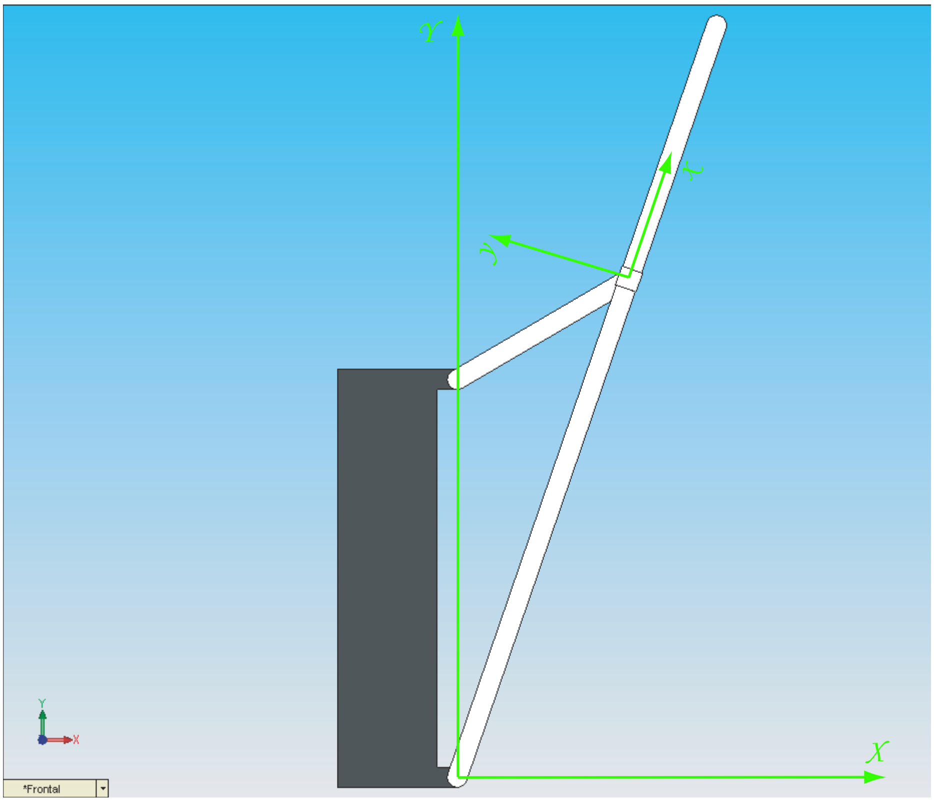
4.3. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de retorno rápido. Calcular la velocidad del punto B (perteneciente a la barra 4 (barra larga)) para un ángulo de la barra de entrada de $\theta_2 = 30^o$ y $\omega_2 = 1rad/s$. Las dimensiones son barra de entrada 2 m, distancia entre centros 4 metros, barra 3 8 m.



Resolución

A es un punto de la barra 2 (barra de entrada), y B pertenece a la barra 4. El eje de coordenadas fijo lo situamos en O_1(centro de rotación de la barra 2) y el eje intermedio con centro en A y rotando con la barra 4.



Calculamos la velocidad de A:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{O_1 A} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} x \left\{ \begin{array}{c} 2\cos 30 \\ 2\sin 30 \\ 0 \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2\cos 30 & 2\sin 30 & 0 \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1{,}73205 \\ 0 \end{array} \right\} \; modulo \perp \overrightarrow{O_1 A}$$

$$\left| \overrightarrow{V_A} \right| = 1{,}999 m/s$$

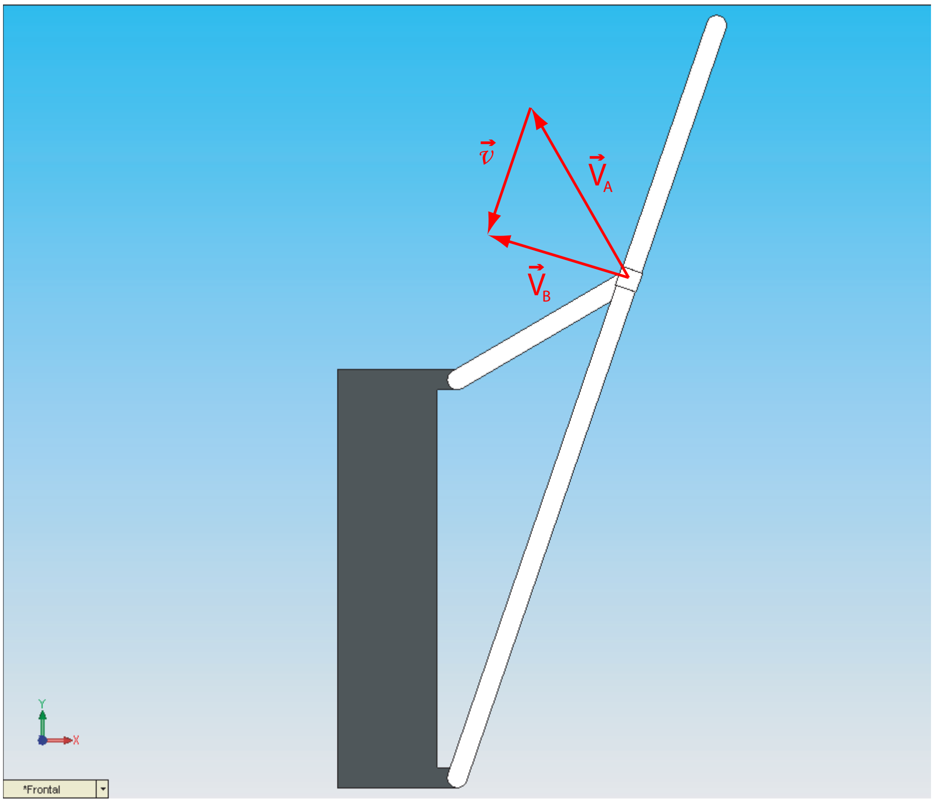
Calculamos la velocidad de B:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{\omega_4} x \overrightarrow{O_2 B} \left\{ \begin{array}{c} direccion : perpendicular \overrightarrow{O_2 B} \\ MoDulo : ? \end{array} \right\}$$

Y también con la fórmula del movimiento relativo según los ejes definidos al principio del problema:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{v} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_4} x \overrightarrow{AB}}_{0 yaque \overrightarrow{AB} = 0} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{v}$$

El vector $\overrightarrow{V_B}$ va a ser perpendicular a $\overrightarrow{O_2B}$ por la ecuación anterior y el $\overrightarrow{v}$ va a ser paralelo al eje x del sistema intermedio, ya que el movimiento relativo que describe para alguien situado en (x,y) es de rectas paralelas a ox. Del vector $\overrightarrow{V_A}$ conocemos módulo y dirección. Aplicamos las fórmulas al dibujo y obtenemos:

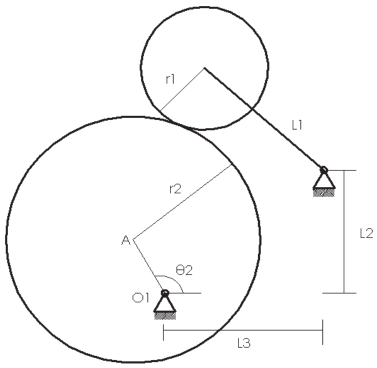


Aplicamos el factor de escala al dibujo y obtenemos que la velocidad del punto B es:

$$\mid \overrightarrow{V_B} \mid = \frac{19{,}48 \cdot 2}{26{,}7} = 1{,}459 m/s$$

4.4. PROBLEMA.

La figura muestra una leva excéntrica. Calcular la velocidad del punto B de forma gráfica para un ángulo de entrada igual a 0º y $\omega_2 = 1rad/s$. Datos: $R1 = 2m$; $L1 = 5m$; $R2 = 4m$; $L2 = 4m$; $O1A = 2m$; $L3 = 5m$.

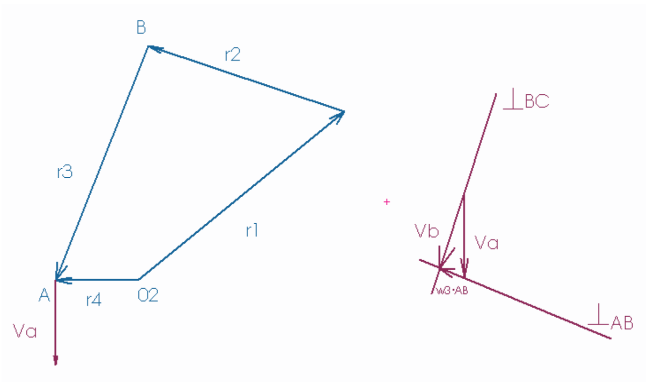


Resolución

$$V_A = \omega_4 \times r_4$$

$$V_B = V_A + \omega_3 \times \overline{AB}$$

De igual modo que antes $V_A = \omega_4 \cdot r_4$. Conocemos dirección y modulo V_B conocemos su dirección (vertical) $\omega_3 \times \overline{AB}$ conocemos su dirección, perpendicular a $\overline{AB}$.

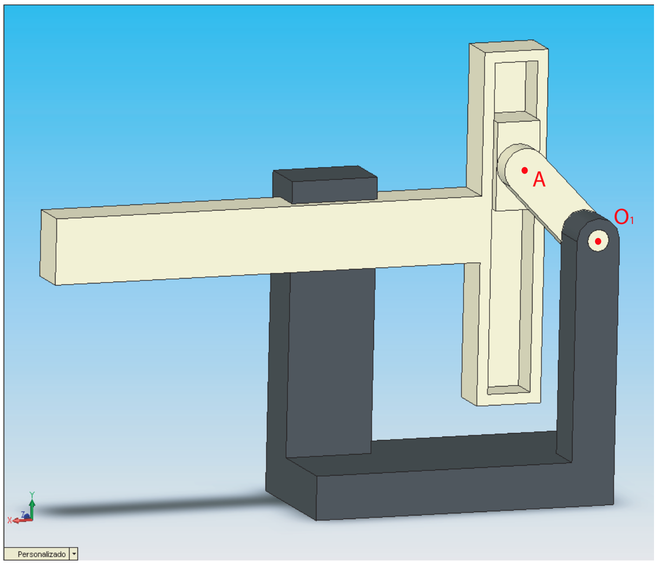


Midiendo y multiplicando por el factor de escala obtenemos:

$$|\overrightarrow{\mathrm{V_A}}| = -2\mathrm{m/s}$$
$$|\overrightarrow{\omega_3}| = -0{,}1053\mathrm{rad/s}$$
$$|\overrightarrow{V_B}| = -1{,}86\mathrm{m/s}$$

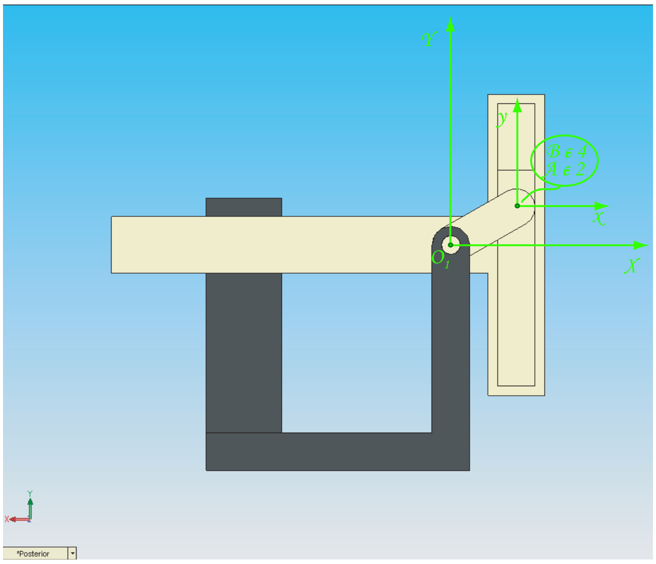
4.5. PROBLEMA.

En la figura se muestra un yugo inglés. Calcular la velocidad del punto B (perteneciente a la barra 4) si el ángulo de la barra de entrada es$\theta_2 = 30^o$ y la velocidad $\omega_2 = 1rad/s$. Las dimensiones son $\overline{OP} = 4$ m.



Resolución

Primero definimos los ejes. El eje fijo lo colocamos en O_1, centro de rotación de la barra de entrada y el eje intermedio (x,y) lo situamos con centro en A y girando con la barra 4, o lo que es lo mismo, no gira.



Calculamos la velocidad del punto A:

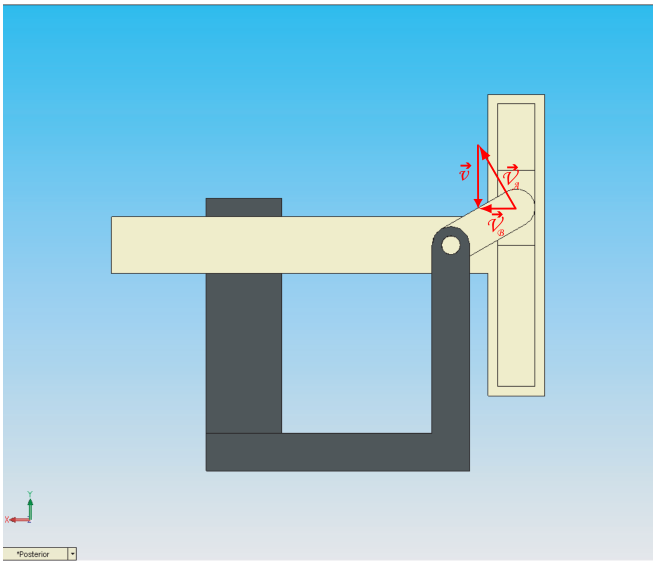
$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{O_1A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} x \begin{Bmatrix} 4\cos 30 \\ 4\sin 30 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 4\cos 30 & 4\sin 30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3{,}4646 \\ 0 \end{Bmatrix} \; modulo \perp \overrightarrow{O_1A}$$

$$\left|\overrightarrow{V_A}\right| = 4m/s$$

Calculamos la velocidad del punto B:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{v} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_4} x \overrightarrow{AB}}_{0 yaque \overrightarrow{\omega_4}=0} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{v}$$

La velocidad del punto B sabemos que va a ser paralela al eje X, debido al movimiento del yugo, y la velocidad relativa va a ser paralela al eje y, porque la barra 4 se va a mover hacia arriba y hacia debajo por la guía. Ya tenemos todas las direcciones y módulos necesarios para hacer el gráfico de velocidades:

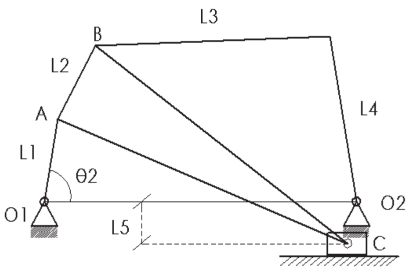


Si medimos y le aplicamos el factor de escala obtenemos que:

$$\left|\overrightarrow{V_B}\right| = \frac{6{,}127 \cdot 4}{14{,}15} = 1{,}732 m/s$$

4.6. PROBLEMA.

Determinar la velocidad del punto C del mecanismo que se muestra en la figura. El ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$.
Datos: $L1 = 2m$, $O1O2 = 8m$, $L2 = 2m$, $AC = 8m, L3 = 6m, BC = 8m, L4 = 4m, L5 = 1m$.

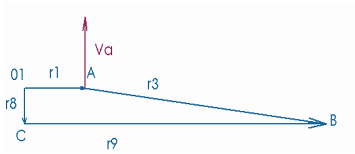


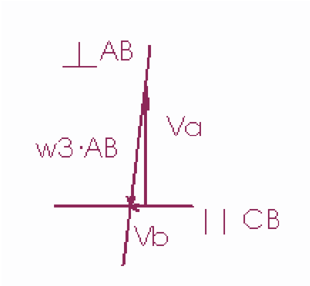
Resolución

$V_A = \omega_1 \cdot r_1$

$V_B = V_A + \omega_3 \times \overline{AB}$

De igual modo que antes $V_A = \omega_1 \cdot r_1$. Conocemos dirección y modulo V_B conocemos su dirección (horizontal) $\omega_3 \times \overline{AB}$ conocemos su dirección, perpendicular a $\overline{AB}$.



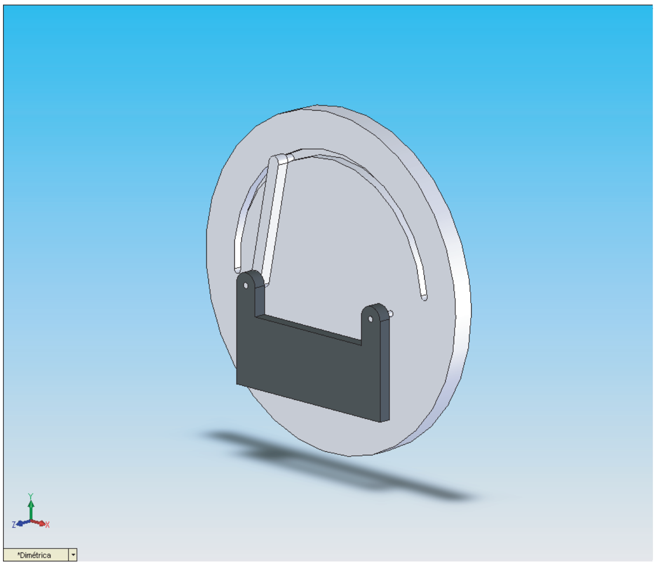


Midiendo y multiplicando por el factor de escala obtenemos:

$$| \overrightarrow{\mathrm{V_A}} | = 2\mathrm{m/s}$$
$$| \overrightarrow{\omega_3} | = 0{,}252\mathrm{rad/s}$$
$$| \overrightarrow{V_B} | = 0{,}252\mathrm{m/s}$$

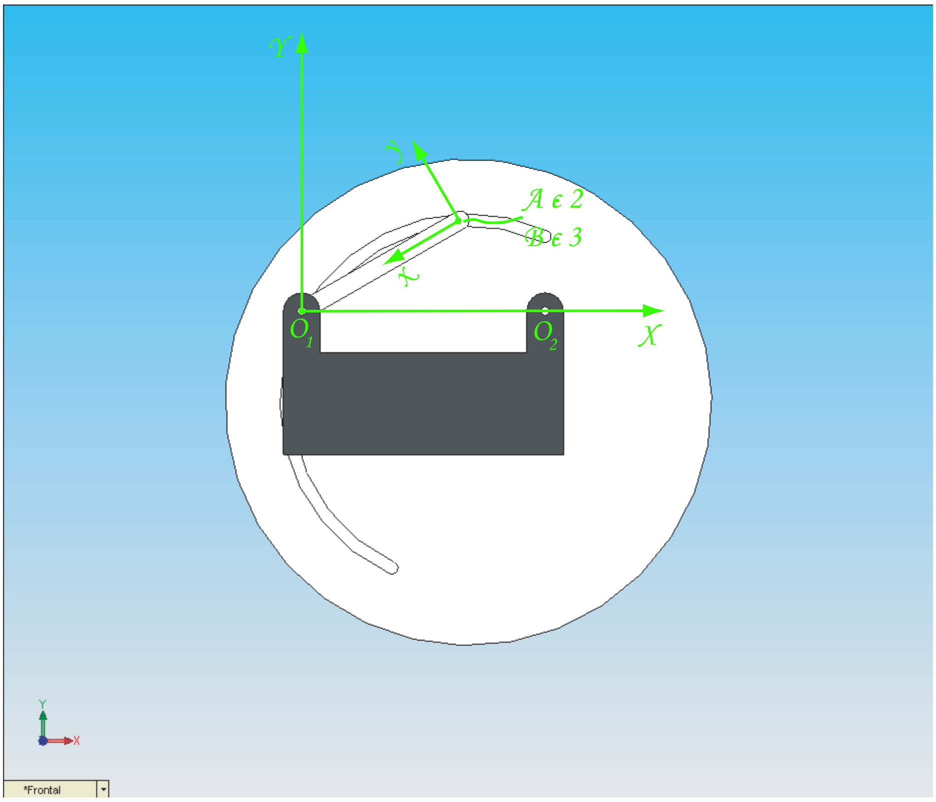
4.7. PROBLEMA.

En la figura se muestra una rueda escéntrica con una guía por donde se desplaza el bulón de barra 2. Calcular la velocidad del punto B perteneciente a la barra 3 (rueda) si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_2 = 30^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$. La longitud de la barra 2 es de 3 m, del centro de la rueda al punto sobre el que gira 2 m, y desde ese punto al centro de giro de la barra 2 hay 4 m.



Resolución

Situamos los ejes fijos con centro en O_1 y los intermedios con centro en A y rontando con 2, tal y como se muestra a continuación:



Calculamos la velocidad del punto A:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{\omega_2} x \overline{O_1 A} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} x \left\{ \begin{array}{c} 3\cos 30 \\ 3\sin 30 \\ 0 \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2{,}598 & 1{,}5 & 0 \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{c} -1{,}5 \\ 2{,}598 \\ 0 \end{array} \right\}$$

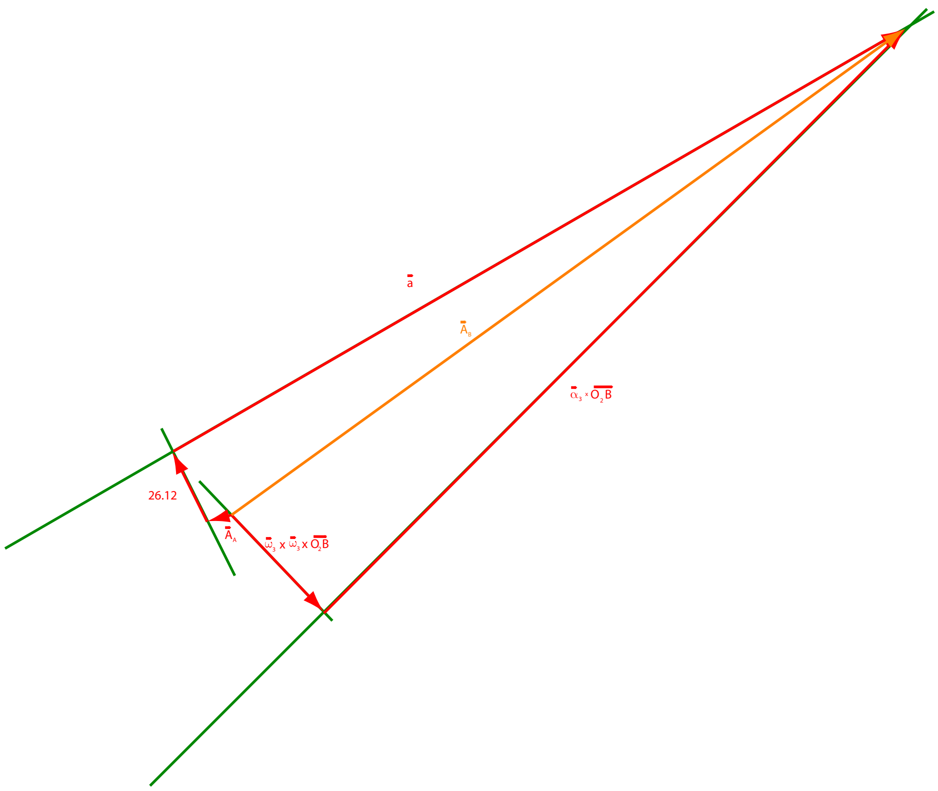
$$\left| \overrightarrow{V_A} \right| = 2{,}999 m/s$$

Calculamos la velocidad del punto B:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{v} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{AB}}_{0 yaque \overrightarrow{AB}=0} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{\omega_3} x \overline{O_2 A} \left\{ \begin{array}{c} direccion : perpendicular \overline{O_2 A} \\ MoDulo :? \end{array} \right\}$$

Del vector $\overrightarrow{V_A}$ conocemos todo y de $\overrightarrow{V_B}$ la dirección, por lo que solo nos queda analizar el vector $\overrightarrow{v}$. Un sujeto situado en el eje (x,y) verá el punto B moverse el eje x, por lo que ya conocemos el módulo de este vector. Dibujamos los resultados:

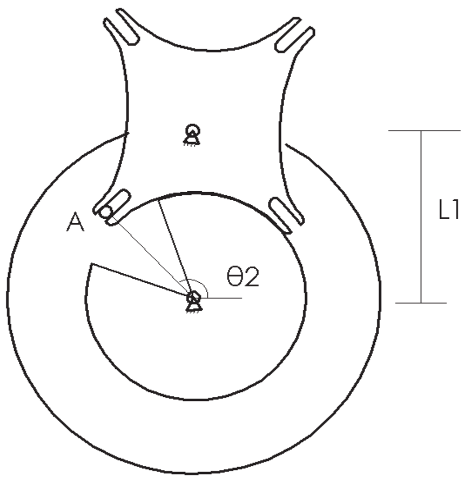


Aplicamos el factor de escala y obtenemos que el módulo de la velocidad del punto B vale:

$$\left| \overrightarrow{V_B} \right| = \frac{106{,}06 \cdot 3}{23{,}97} = 13{,}274 m/s$$

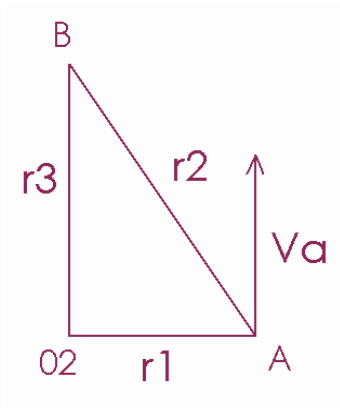
4.8. PROBLEMA.

La figura muestra la rueda de ginebra. Determinar la velocidad del punto A si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$.
Datos: $L1 = 3m$; $O2A = 2m$.



Resolución

$V_A = \omega_1 \times r_1$.
El punto A está en la rueda.



Midiendo y multiplicando por el factor de escala obtenemos:

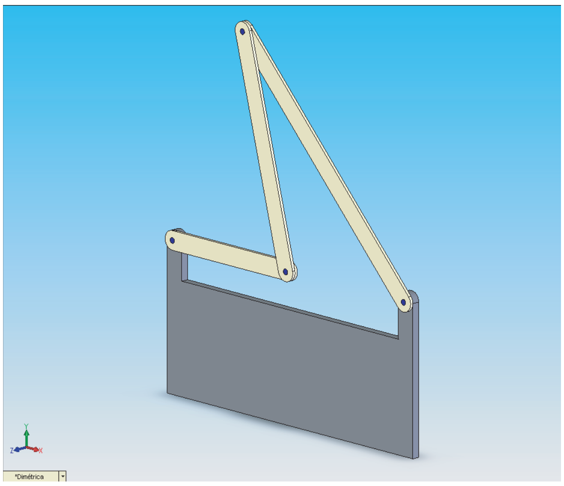
$$| \overrightarrow{\mathrm{V_A}} |= 2\mathrm{m/s}$$

Capítulo 5

RELACIÓN 5. ANÁLISIS DE VELOCIDAD. Método Analítico.

5.1. PROBLEMA.

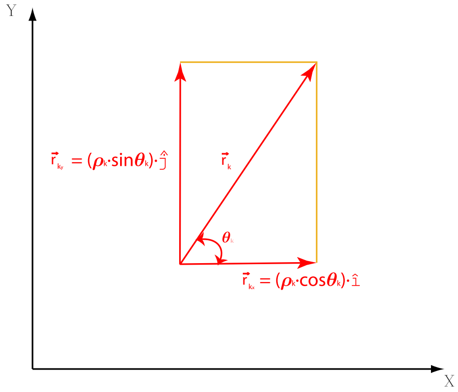
En la figura se muestra un mecanismo de cuatro barras. Para un ángulo de entrada $\theta_2 = 0^o$ y velocidad de esta barra $\omega_2 = 1rad/s$ calcular la velocidad de la barra 4 (barra de salida) aplicando el método analítico. Las dimensiones son:
$L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.



Resolución

Podemos aplicar el método analítico de dos formas distintas. Una primera es con las ecuaciones cinemáticas empleadas en el análisis gráfico (relación 4). Una vez tenemos las ecuaciones vectoriales damos los valores a los datos que conozcamos y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante sabiendo que cada ecuación vectorial son dos ecuaciones escalares.

La segunda forma de resolver estos problemas es aplicando ecuaciones de cierre. Este método consiste en definir unos vectores para formar un circuito cerrado y poder plantear una serie de ecuaciones. En algunos problemas tendremos que elegir más de un circuito de vectores.
En primer lugar tenemos que plantear la ecuación vectorial y aplicar la notación compleja para los vectores:



$$\overrightarrow{r_k} = \rho_k \cdot e^{j\theta_k}$$

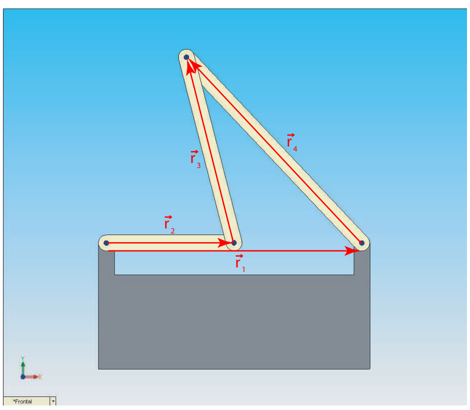
$$e^{j\theta_k} = \cos\theta_k + j \cdot \sin\theta_k$$
$$\overrightarrow{r_k} = \rho_k \left(\cos\theta_k + j \cdot \sin\theta_k\right)$$

con k un vector cualquiera.
Si derivamos esta expresión con respecto al tiempo tenemos que:

$$\frac{d\left(\overrightarrow{r_k}\right)}{dt} = \frac{d\left(\rho_k \cdot e^{j\theta_k}\right)}{dt} = \frac{d(\rho_k)}{dt} \cdot \mathrm{e}^{j\theta_k} + \frac{d\left(e^{j\theta_k}\right)}{dt} \cdot \rho_k = \dot{\rho}_k \cdot \mathrm{e}^{j\theta_k} + j\dot{\theta}_k \rho_k \cdot \mathrm{e}^{j\theta_k}$$

$$\vec{r}_k' = \left(\dot{\rho}_k + j\dot{\theta}_k \rho_k\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_k} = \left(\dot{\rho}_k + j\dot{\theta}_k \rho_k\right) \cdot \left(\cos\theta_k + j\sin\theta_k\right)$$

En segundo lugar elegiremos el o los circuitos de vectores que vamos a emplear para resolver el problema. Se escogerán en función de los datos que nos pregunten en el enunciado del problema o los parámetros que querramos conocer nosotros. Para este problema elegimos los siguientes:



A continuación tendríamos que resolver el problema de posición para conocer todos los módulos y ángulos de la figura, pero como ya lo hicimos en la relación 2, pasamos a plantear las ecuaciones.

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{r_4}$$

$$\overrightarrow{r_1}' + \overrightarrow{r_2}' + \overrightarrow{r_3}' = \overrightarrow{r_4}'$$

$$\left(\dot{\rho}_2 + j\dot{\theta}_2\rho_2\right) \cdot e^{j\theta_2} + \left(\dot{\rho}_3 + j\dot{\theta}_3\rho_3\right) \cdot e^{j\theta_3} = \left(\dot{\rho}_4 + j\dot{\theta}_4\rho_4\right) \cdot e^{j\theta_4}$$

$$(0 + j \cdot 1 \cdot 2) \cdot 1 + \left(0 + j \cdot \dot{\theta}_3 \cdot 3\right) \cdot (-0{,}25 + j \cdot 0{,}97) = \left(0 + j \cdot \dot{\theta}_4 \cdot 4\right) \cdot (-0{,}69 + j \cdot 0{,}73)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_3 = 0{,}567 rad/s \\ \dot{\theta}_4 = -0{,}566 rad/s \end{array} \right.$$

Vemos que los módulos de los vectores son constantes en todos los casos por lo que sus derivadas son nulas.

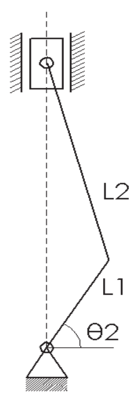
Y lo último que tenemos que realizar una vez calculado los parámetros que desconocíamos es resolver la velocidad del punto B. La velocidad de la barra 4 la podemos calcular como la velocidad del punto B, ya que pertenece a la barra. La velocidad de un punto se calcula como la derivada del vector que une el punto con un punto fijo. Por lo que el resultado es el siguiente:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{r_4}' = \left(\dot{\rho}_4 + j\dot{\theta}_4\rho_4\right) \cdot e^{j\theta_4} = (0 + j \cdot (-0{,}566) \cdot 4) \cdot (-0{,}69 + j \cdot 0{,}73) = \left\{ \begin{array}{c} 1{,}65 \\ 1{,}56 \end{array} \right\} m/s$$

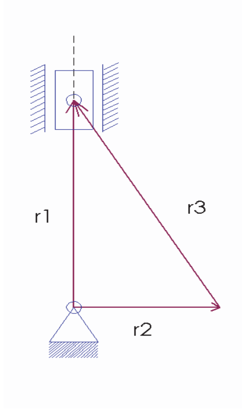
Si hacemos el módulo de la velocidad observamos que el resultado es parecido al obtenido en la relación 4 y sería igual si las mediciones fuesen exactas.

5.2. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo biela-manivela. Determinar la velocidad del pistón si tenemos un ángulo de entrada $\theta_2 = 45^{o}$ y una velocidad de entrada $\omega_2 = 1 rad/s$ aplicando el método analítico. Datos: $L1 = 2m, L2 = 4m$.



Resolución



$$\dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_1$$

$$\dot{\rho}_2 e^{i\theta_2} + \rho_2 i\dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} + \dot{\rho}_3 e^{i\theta_3} + \rho_3 i\dot{\theta}_3 e^{i\theta_3} = \dot{\rho}_1 e^{i\theta_1} + \rho_1 i\dot{\theta}_1 e^{i\theta_1}$$

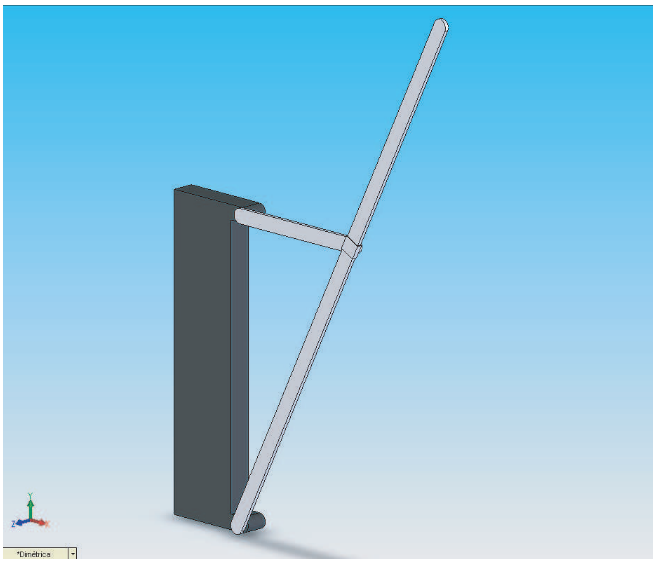
$$\rho_2 i\dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} + \rho_3 i\dot{\theta}_3 e^{i\theta_3} = \dot{\rho}_1 e^{i\theta_1}$$

$$\dot{\theta}_2\rho_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_3\rho_3 \sin\theta_3 = \dot{\rho}_1 \cos\theta_1$$
$$\dot{\theta}_2\rho_2 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_3\rho_3 \cos\theta_3 = \dot{\rho}_1 sen\theta_1$$

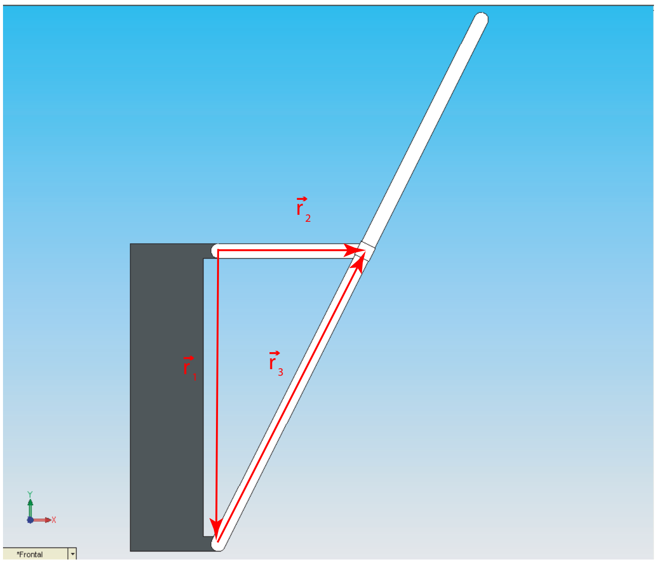
$$\omega_3 = \frac{\omega_2\rho_2 \sin\theta_2}{\rho_3 \sin\theta_3} = -0{,}3779\ rad/s$$
$$\dot{\rho}_1 = \dot{\theta}_2\rho_2 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_3\rho_3 \cos\theta_3 = 1{,}984\ m/s$$

5.3. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de retorno rápido. Calcular la velocidad del punto B (perteneciente a la barra 4 (barra larga)) para un ángulo de la barra de entrada de $\theta_2 = 30^o$ y $\omega_2 = 1 rad/s$ aplicando el método analítico. Las dimensiones son barra de entrada 2 m, distancia entre centros 4 metros, barra 3 8 m.



Resolución



$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_3}$$

$$\overrightarrow{r_1}' + \overrightarrow{r_2}' = \overrightarrow{r_3}'$$

$$\left(\dot{\rho}_2 + j\dot{\theta}_2\rho_2\right) \cdot e^{j\theta_2} = \left(\dot{\rho}_3 + j\dot{\theta}_3\rho_3\right) \cdot e^{j\theta_3}$$

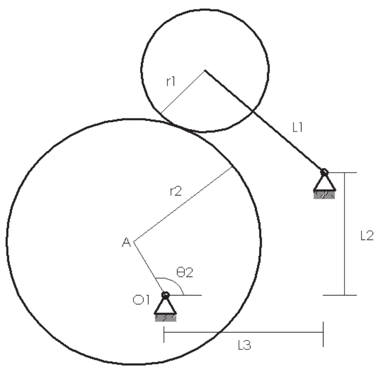
$$(0 + j \cdot 1 \cdot 2) \cdot 1 = \left(\dot{\rho}_3 + j \cdot \dot{\theta}_3 \cdot 4{,}43\right) \cdot (0{,}45 + j \cdot 0{,}89)$$
$$\begin{cases} \dot{\theta}_3 = 0{,}204 rad/s \\ \dot{\rho}_3 = 1{,}79 m/s \end{cases}$$

La velocidad del punto B la calculamos como la derivada del vector que une un punto fijo con este, y el resultado es el mismo si empleamos $\overrightarrow{r_2}$ o $\overrightarrow{r_3}$.

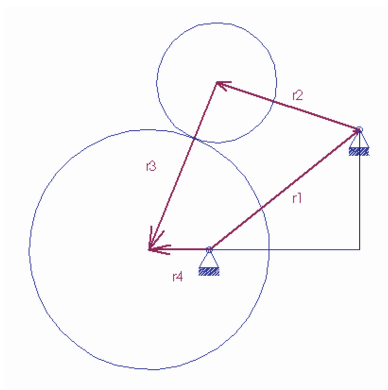
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{r_3}' = \left(\dot{\rho}_3 + j\dot{\theta}_3\rho_3\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_3} = (1{,}79 + j \cdot 0{,}904) \cdot (0{,}45 + j \cdot 0{,}89) = \left\{ \begin{array}{c} 0{,}0054 \\ 1{,}594 \end{array} \right\} m/s$$

5.4. PROBLEMA.

La figura muestra una leva excéntrica. Calcular la velocidad del punto B de forma gráfica para un ángulo de entrada igual a 0º y $\omega_2 = 1rad/s$ aplicando el método analítico. Datos: $R1 = 2m$; $L1 = 5m$; $R2 = 4m$; $L2 = 4m$; $O1A = 2m$; $L3 = 5m$.



Resolución



$\dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \dot{r}_3 = \dot{r}_4$
$\dot{\rho}_1 e^{i\theta_1} + \rho_1\omega_1 i e^{i\theta_1} + \dot{\rho}_2 e^{i\theta_2} + \rho_2\omega_2 i e^{i\theta_2} + \dot{\rho}_3 e^{i\theta_3} + \rho_3\omega_3 i e^{i\theta_3} = \dot{\rho}_4 e^{i\theta_4} + \rho_4\omega_4 i e^{i\theta_4}$
$\dot{\rho}_1 = \omega_1 = \dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_3 = \dot{\rho}_4 = 0$

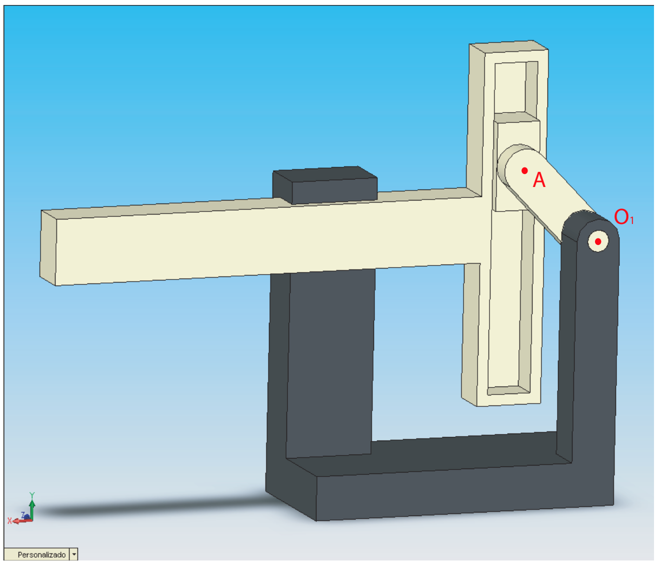
$\rho_2\omega_2 \sin\theta_2 + \rho_3\omega_3 \sin\theta_3 = 0$
$\rho_2\omega_2 \cos\theta_2 + \rho_3\omega_3 \cos\theta_3 = \rho_4\omega_4$

$\omega_2 = -\frac{\rho_3\omega_3 \sin\theta_3}{\rho_2 \sin\theta_2} = 0{,}3714\ rad/s$
$\omega_3 = -\frac{\rho_4\omega_4}{\rho_3\left(\frac{\sin\theta_3}{tg\theta_2} + \cos\theta_3\right)} = 0{,}1045\ rad/s$

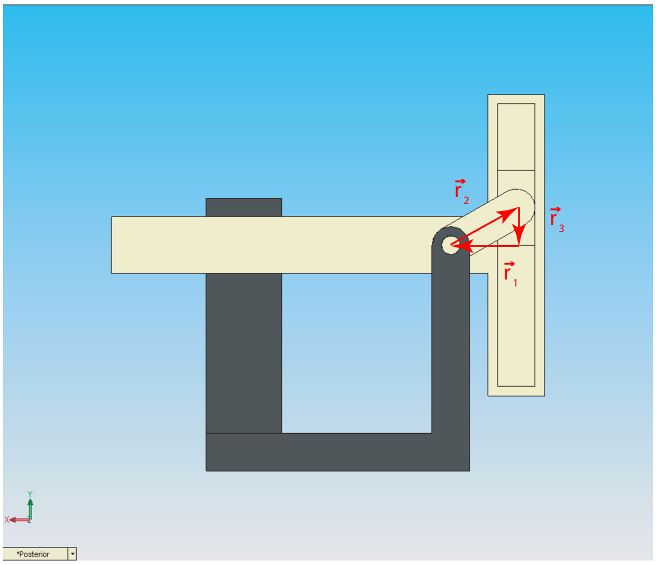
$V_B = \rho_2\omega_2 i e^{i\theta_2} = (0{,}581, -1{,}7636)\ m/s$
$|V_B| = 1{,}856\ m/s$

5.5. PROBLEMA.

En la figura se muestra un yugo inglés. Calcular la velocidad del punto B (perteneciente a la barra 4) si el ángulo de la barra de entrada es$\theta_2 = 30^o$ y la velocidad $\omega_2 = 1 rad/s$ aplicando el método analítico. Las dimensiones son $\overline{OP} = 4$ m.



Resolución



$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$

$\overrightarrow{r_1}' = \overrightarrow{r_2}' + \overrightarrow{r_3}'$

$\left(\dot{\rho}_1 + j\dot{\theta}_1\rho_1\right) \cdot e^{j\theta_1} = \left(\dot{\rho}_2 + j\dot{\theta}_2\rho_2\right) \cdot e^{j\theta_2} + \left(\dot{\rho}_3 + j\dot{\theta}_3\rho_3\right) \cdot e^{j\theta_3}$

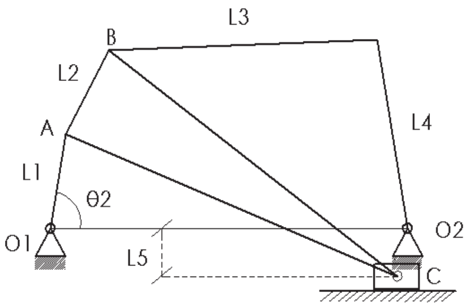
$(\dot{\rho}_1 + j \cdot 0 \cdot 3{,}464 \cdot 2) \cdot (-1) = (0 + j \cdot 4 \cdot 1) \cdot (0{,}86 + j0{,}5) + (\dot{\rho}_3 + j \cdot 0 \cdot 2) \cdot (-j)$
$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\rho}_1 = 2m/s \\ \dot{\rho}_3 = 3{,}46m/s \end{array} \right.$

Una vez calculados todos los parámetros podemos resolver la velocidad del punto B:

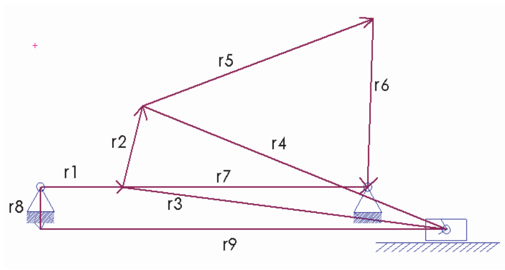
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{r_1}' = \left(\dot{\rho}_1 + j\dot{\theta}_1\rho_1\right) \cdot e^{j\theta_1} = (2 + j \cdot 0) \cdot (-1 + j \cdot 0) = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right\} m/s$$

5.6. PROBLEMA.

Determinar la velocidad del punto C del mecanismo que se muestra en la figura aplicando el método analítico. El ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1rad/s$.
Datos: $L1 = 2m$, $O1O2 = 8m$, $L2 = 2m$, $AC = 8m$, $L3 = 6m$, $BC = 8m$, $L4 = 4m$, $L5 = 1m$.



Resolución



$$\dot{r}_1 + \dot{r}_3 + \dot{r}_8 = \dot{r}_9$$
$$\dot{\rho}_1 e^{i\theta_1} + \rho_1\omega_1 i e^{i\theta_1} + \dot{\rho}_3 e^{i\theta_3} + \rho_3\omega_3 i e^{i\theta_3} + \dot{\rho}_8 e^{i\theta_8} + \rho_8\omega_8 i e^{i\theta_8} = \dot{\rho}_9 e^{i\theta_9} + \rho_9\omega_9 i e^{i\theta_9}$$
$$\dot{\rho}_1 = \omega_8 = \omega_9 = \dot{\rho}_3 = \dot{\rho}_8 = 0$$

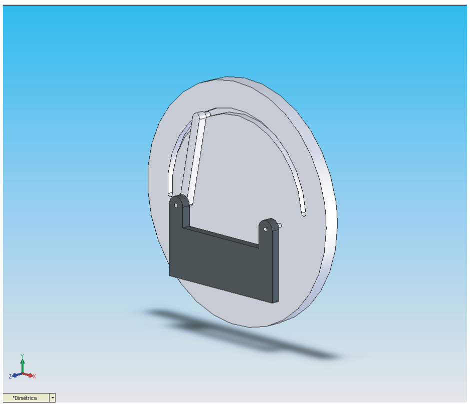
$$\rho_3\omega_3 \sin\theta_3 = \dot{\rho}_9$$
$$\rho_1\omega_1 + \rho_3\omega_3 \cos\theta_3 = 0$$

$$\omega_3 = -\frac{\rho_1\omega_1}{\rho_3\cos\theta_3} = -0{,}252\, rad/s$$
$$\dot{\rho}_9 = -\rho_1\omega_1 tg\theta_3 = -0{,}255\, m/s$$

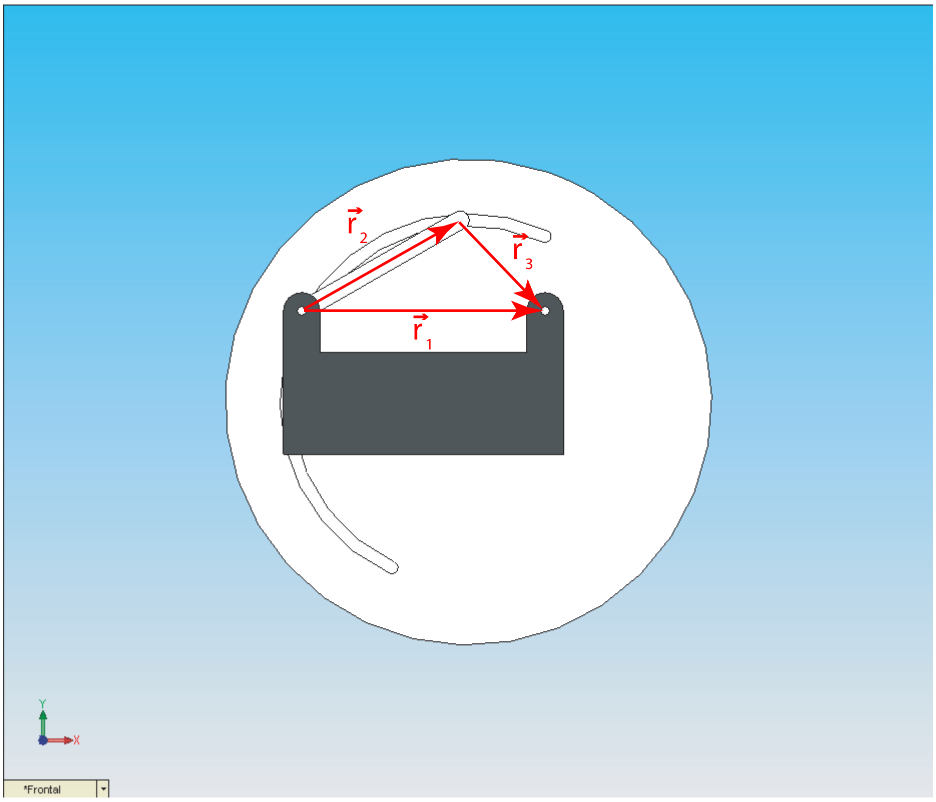
$$V_B = \dot{\rho}_9 e^{i\theta_9} = (-0{,}255, 0)\, m/s$$
$$|V_B| = 0{,}255\, m/s$$

5.7. PROBLEMA.

En la figura se muestra una rueda escéntrica con una guía por donde se desplaza el bulón de barra 2. Calcular la velocidad del punto B perteneciente a la barra 3 (rueda) si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_2 = 30^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$ aplicando el método analítico. La longitud de la barra 2 es de 3 m, del centro de la rueda al punto sobre el que gira 2 m, y desde ese punto al centro de giro de la barra 2 hay 4 m.



Resolución



$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$$

$$\overrightarrow{r_1}' = \overrightarrow{r_2}' + \overrightarrow{r_3}'$$

$$0 = \left(\dot{\rho}_2 + j\dot{\theta}_2\rho_2\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_2} + \left(\dot{\rho}_3 + j\dot{\theta}_3\rho_3\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_3}$$

$$0 = (0 + j \cdot 3 \cdot 1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot 0{,}5\right) + \left(\dot{\rho}_3 + j \cdot \dot{\theta}_3 \cdot 2{,}053\right) \cdot (-0{,}98 + j0{,}73)$$

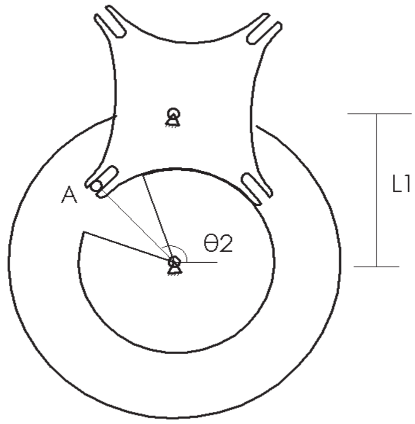
$$\begin{cases} \dot{\theta}_3 = 4{,}585 rad/s \\ \dot{\rho}_3 = -8{,}50 m/s \end{cases}$$

Como la velocidad de un punto es la derivada del vector que une un punto fijo cualquiera con el punto en cuestión, planteamos la velocidad del punto B de la siguiente manera:

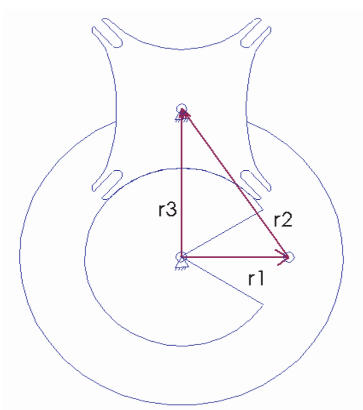
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{r_3}' = \left(\dot{\rho}_3 + j\dot{\theta}_3\rho_3\right) \cdot e^{j\theta_3} = (-8{,}50 + j4{,}585) \cdot (-0{,}98 + j0{,}73) = \begin{Bmatrix} -2{,}51 \\ -5{,}11 \end{Bmatrix} m/s$$

5.8. PROBLEMA.

La figura muestra la rueda de ginebra. Determinar la velocidad del punto A si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1rad/s$ aplicando el método analítico.
Datos: $L1 = 3m$; $O2A = 2m$.



Resolución



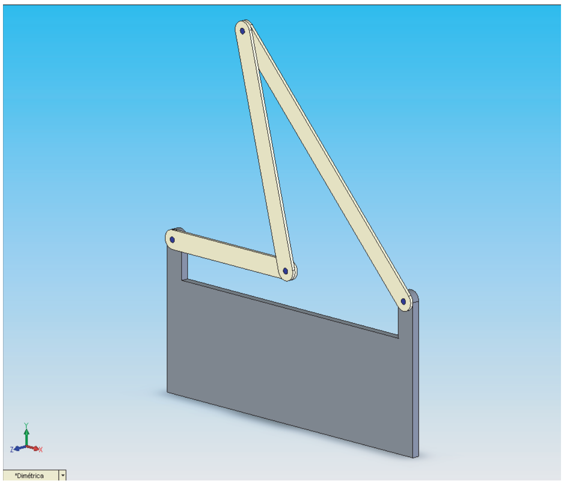
$V_A = \dot{r}_1 = \rho_1\omega_1 i e^{i\theta_1} = (0,2)\ m/s$
$|V_A| = 2\ m/s$

Capítulo 6

RELACIÓN 6. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN. Método Gráfico.

6.1. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de cuatro barras. Para un ángulo de entrada $\theta_2 = 0^o$ y velocidad de esta barra $\omega_2 = 1rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$ calcular la aceleración de la barra 4 (barra de salida). Las dimensiones son:
$L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.



Resolución

La resolución del problema es igual que para el caso de la velocidad pero cambiando la fórmula por la de aceleración y la resolución es idéntica pero más laboriosa.

ejes intermedios: origen en O_1 y girando con 2.

$$\overrightarrow{A_A} = \underbrace{\overrightarrow{A_{O_1}}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_2} x \left(\overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{r_{O_1 A}}\right)}_{\left\{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c}2\cos\theta_2\\2\sin\theta_2\\0\end{array}\right\}} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_2} x \overrightarrow{r_{O_1 A}}}_{\left\{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c}2\cos\theta_2\\2\sin\theta_2\\0\end{array}\right\}} = \left\{\begin{array}{c}-2\\2\\0\end{array}\right\}$$

ejes intermedios en A y girando con 3:

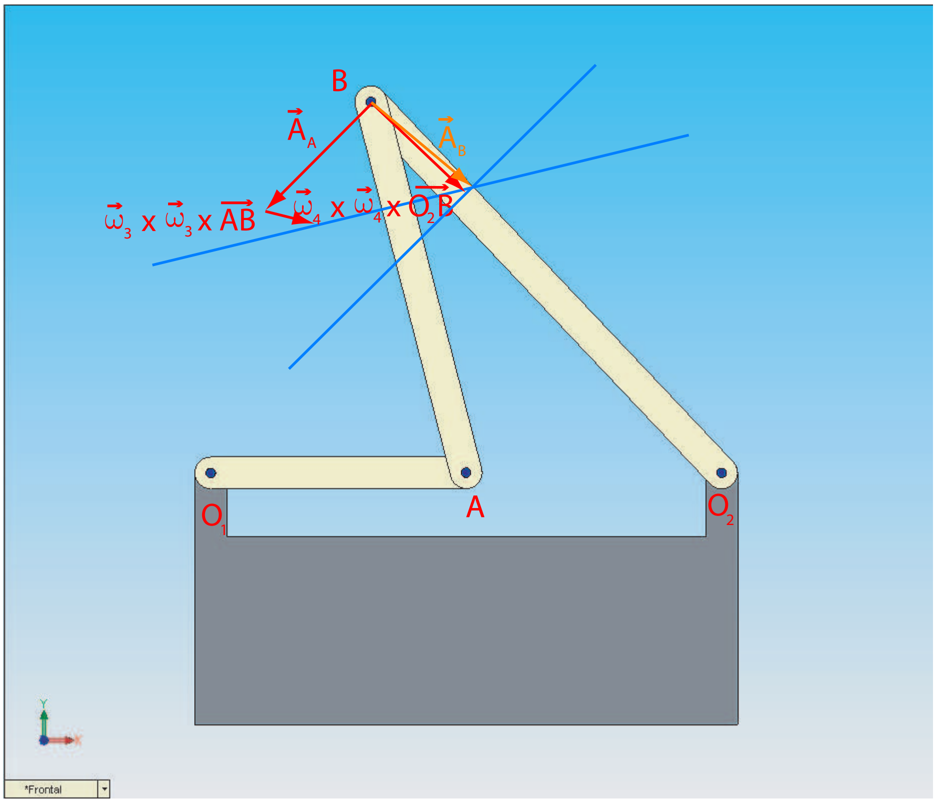
$$\overrightarrow{A_B} = \underbrace{\overrightarrow{A_A}}_{\left\{\begin{array}{c}-2\\2\\0\end{array}\right\}} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_3} x \left(\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{AB}}\right)}_{\parallel AB} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_3} x \overrightarrow{r_{AB}}}_{\perp AB}$$

ejes intermedios en O_2 y girando con 4:

$$\overrightarrow{A_B} = \underbrace{\overrightarrow{A_{O_2}}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_4} x \left(\overrightarrow{\omega_4} x \overrightarrow{r_{O_2 B}}\right)}_{\parallel O_2 B} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_4} x \overrightarrow{r_{O_2 B}}}_{\perp O_2 B}$$

Si medimos en el análisis de velocidad gráfico el vector $\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{V_B}$ y los transformamos a unidades reales obtenemos $|\overrightarrow{\omega_3}|$ y $|\overrightarrow{\omega_4}|$.

$$\left|\overrightarrow{V_B}\right| = |\overrightarrow{\omega_4}|\, x\, |\overrightarrow{r_{AB}}| \Rightarrow |\overrightarrow{\omega_4}| = \frac{2}{3} = 0{,}66 rad/s$$
$$|\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{AB}}| = 1{,}463 \Rightarrow |\overrightarrow{\omega_3}| = \frac{1{,}463}{3} = 0{,}487 rad/s$$

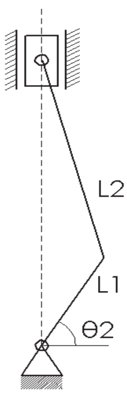


Si medimos en el papel la longitud de la flecha y le aplicamos el factor de escala obtenemos que la aceleración del punto B es:

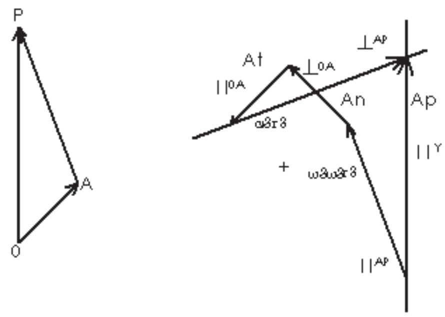
$$\overrightarrow{A_B} = \frac{17{,}18 \cdot 2}{20} = 1{,}718 m/s^2$$

6.2. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo biela-manivela. Determinar la aceleración del pistón si tenemos un ángulo de entrada $\theta_2 = 0$ y una velocidad de entrada $\omega_2 = 1rad/s$m y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$. Datos: $L1 = 2m, L2 = 4m$.



Resolución



$A_P - A_A = \alpha_3 \times r_3 + \omega_3 \times \omega_3 \times r_3$

Midiendo obtenemos:

$A_p = 2{,}67 m/s^2$;

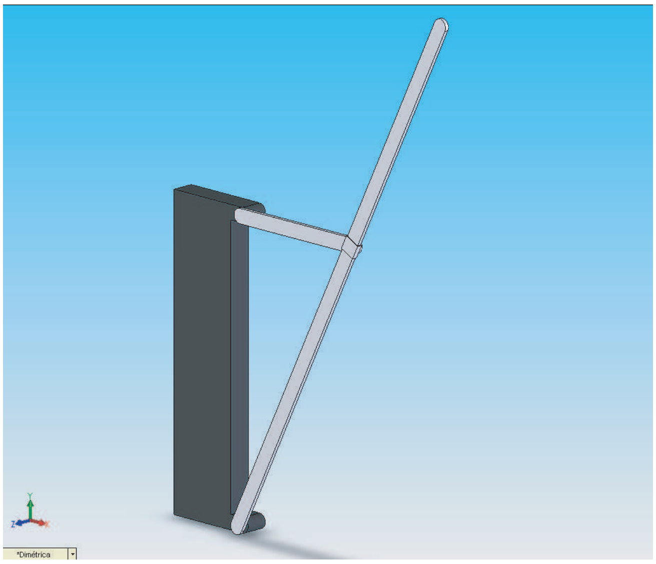
$\alpha_3 = 0{,}324\ rad/s^2$

La solución es:

$\vec{A}p = \frac{5{,}341 \cdot 2{,}2}{4{,}4} = 2{,}67\ m/s^2$

6.3. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de retorno rápido. Calcular la aceleración del punto B (perteneciente a la barra 4 (barra larga)) para un ángulo de la barra de entrada de $\theta_2 = 30^o$ y $\omega_2 = 1rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$. Las dimensiones son barra de entrada 2 m, distancia entre centros 4 metros, barra 3 8 m.



Resolución

ejes intermedios con centro en $A \in 2$ y girando con 3

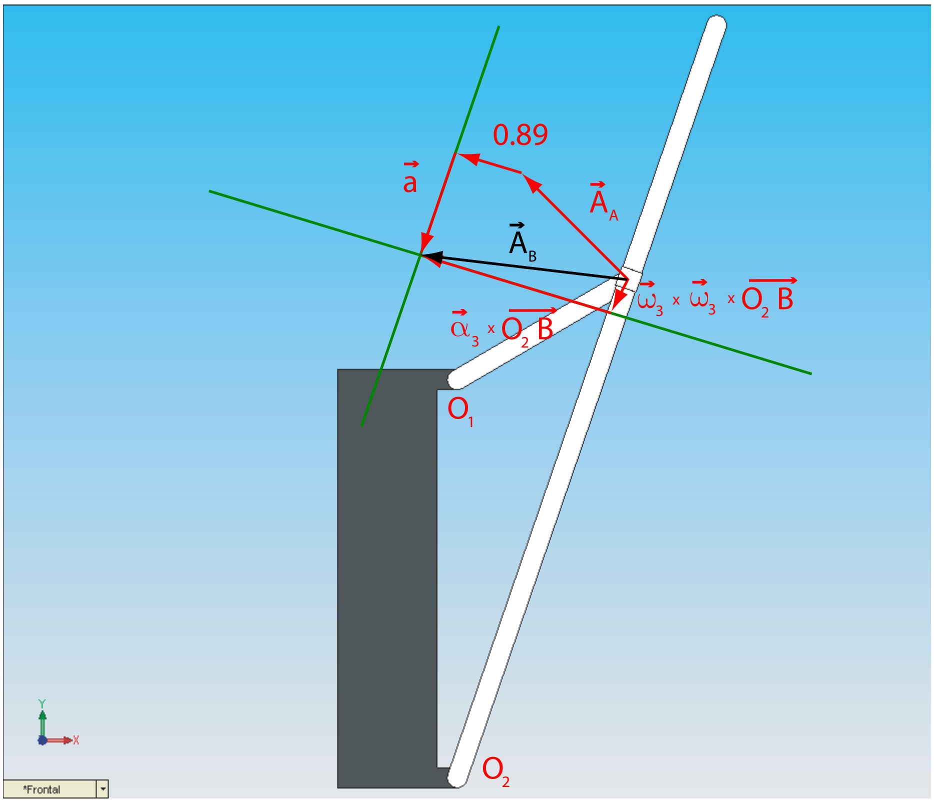
$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{A_A} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_3} x \left(\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{AB}}\right)}_{0, A=B} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_3} x \overrightarrow{r_{AB}}}_{0, A=B} + \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_A} + \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\| O_2 B} + 2\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{A_A} = \underbrace{\overrightarrow{A_{O_1}}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_2} x \left(\overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{r_{O_1 A}}\right)}_{\left\{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c}2\cos\theta_2\\2\sin\theta_2\\0\end{array}\right\}} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_2} x \overrightarrow{r_{O_1 A}}}_{\left\{\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c}2\cos\theta_2\\2\sin\theta_2\\0\end{array}\right\}}$$

ejes intermedios en O_2 y girando con 3:

$$\overrightarrow{A_B} = \underbrace{\overrightarrow{\omega_3} x \left(\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{O_2 B}}\right)}_{\| O_2 B} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_3} x \overrightarrow{r_{O_2 B}}}_{\perp O_2 B}$$

Del análisis de velocidad gráfico obtenemos el módulo de $\overrightarrow{v}$ (1.37m/s) y el módulo de $\overrightarrow{\omega_3}$ como $V_B/\overline{O_2 B}$ (0.326rad/s). Otra cosa que tenemos que tener en cuenta es la velocidad relativa de $\overrightarrow{a}$, que es $\| \overline{O_2 B}$ porque se mueve sobre 3. Con las fórmulas y estos datos podemos dibujar lo siguiente:

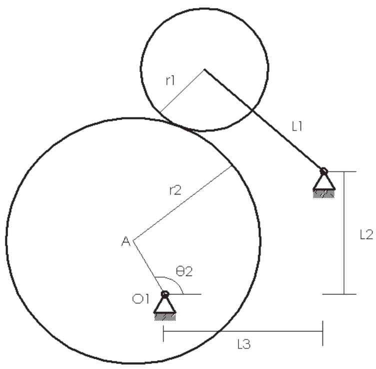


Midiendo la aceleración y aplicándole el factor de escala sale un valor de la aceleración del punto B de :

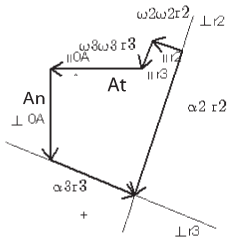
$$\overrightarrow{A_B} = \frac{27{,}32 \cdot 2}{20} = 2{,}732 m/s^2$$

6.4. PROBLEMA.

La figura muestra una leva excéntrica. Calcular la aceleración del punto B de forma gráfica para un ángulo de entrada igual a 0º y $\omega_2 = 1 rad/s$ y $\alpha_2 = 1 rad/s^2$. Datos: $R1 = 2m$; $L1 = 5m$; $R2 = 4m$; $L2 = 4m$; $O1A = 2m$; $L3 = 5m$.



Resolución



$A_A = A_T + A_N = \alpha_4 \times r_4 + \omega_4 \times \omega_4 \times r_4$

Ponemos un eje con centro en A que gira con 3:

$A_B - A_A = \alpha_3 \times r_3 + \omega_3 \times \omega_3 \times r_3$

Ponemos un eje con centro en C que gira con 2:

$A_B - A_C = \alpha_2 \times r_2 + \omega_2 \times \omega_2 \times r_2$

Midiendo obtenemos:

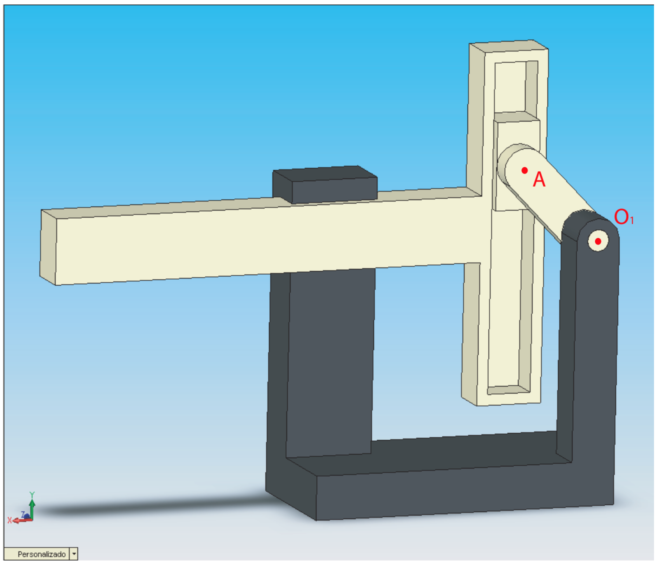
$\alpha_3 = 1{,}026\ rad/s^2$

La solución es:

$\alpha_2 = \frac{0{,}66 \cdot 2}{4} = 0{,}33\ rad/s^2$
$|A_B| = \alpha_2 r_2 + \omega_2^2 r_2 = 2{,}33\ m/s^2$

6.5. PROBLEMA.

En la figura se muestra un yugo inglés. Calcular la aceleración del punto B (perteneciente a la barra 4) si el ángulo de la barra de entrada es$\theta_2 = 30^o$ y la velocidad $\omega_2 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$ aplicando el método analítico. Las dimensiones son $\overline{OP} = 4$ m.



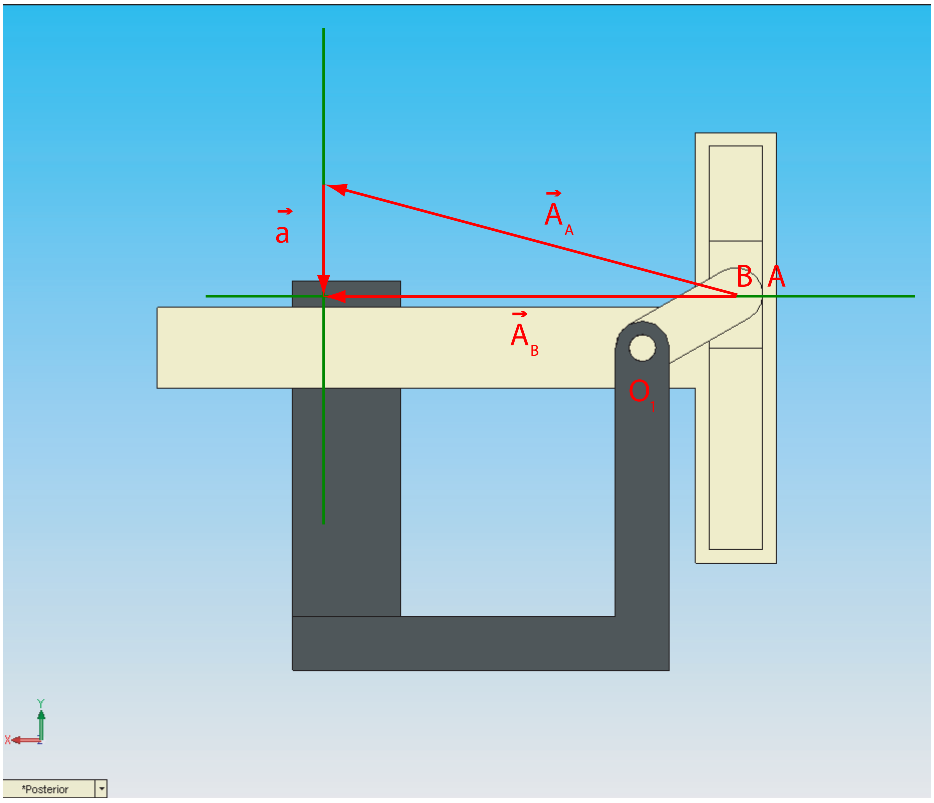
Resolución

ejes intermedios con centro en A y girando con 3:

$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{A_A} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_3} x \left(\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{AB}}\right)}_{0, A=B} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_3} x \overrightarrow{r_{AB}}}_{0, A=B} + \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_A} + \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\| 0_2 B} + 2\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{A_A} = \underbrace{\overrightarrow{\omega_2} x \left(\overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{r_{O_1 A}}\right)}_{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c} 2\cos\theta_2 \\ 2\sin\theta_2 \\ 0 \end{array}\right\}} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_2} x \overrightarrow{r_{O_1 A}}}_{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c} 2\cos\theta_2 \\ 2\sin\theta_2 \\ 0 \end{array}\right\}} = \left\{\begin{array}{c} -5{,}46 \\ 1{,}46 \\ 0 \end{array}\right\}$$

La dirección de $\overrightarrow{A_B}$ es paralela al eje ox mientras que $\overrightarrow{\omega_3}$ es 0 porque la barra 3 no gira. También hay que saber que la velocidad relativa $\overrightarrow{a}$ es paralela al eje oy porque 4 no gira y se desplaza sobre la guía. Con estas consideraciones podemos hacer el siguiente dibujo:

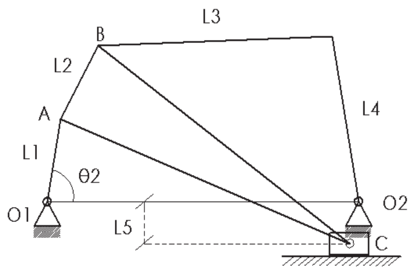


Tomamos la medida de la aceleración de B y la multiplicamos por el factor de escala:

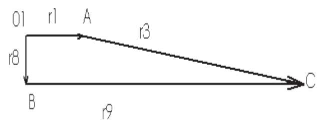
$$\overrightarrow{A_B} = \frac{1 \cdot 54{,}6}{10} = 5{,}46 m/s^2$$

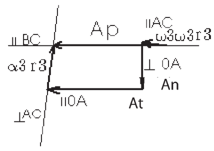
6.6. PROBLEMA.

Determinar la aceleración del punto C del mecanismo que se muestra en la figura. El ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$.
Datos: $L1 = 2m$, $O1O2 = 8m$, $L2 = 2m$, $AC = 8m$, $L3 = 6m$, $BC = 8m$, $L4 = 4m$, $L5 = 1m$.



Resolución





Calculamos la Aceleración del punto A:

$A_A = A_T + A_N = \alpha_1 \times r_1 + \omega_1 \times \omega_1 \times r_1$

Para calcular la aceleración del punto C, ponemos un eje con centro en A,que gira con 3:

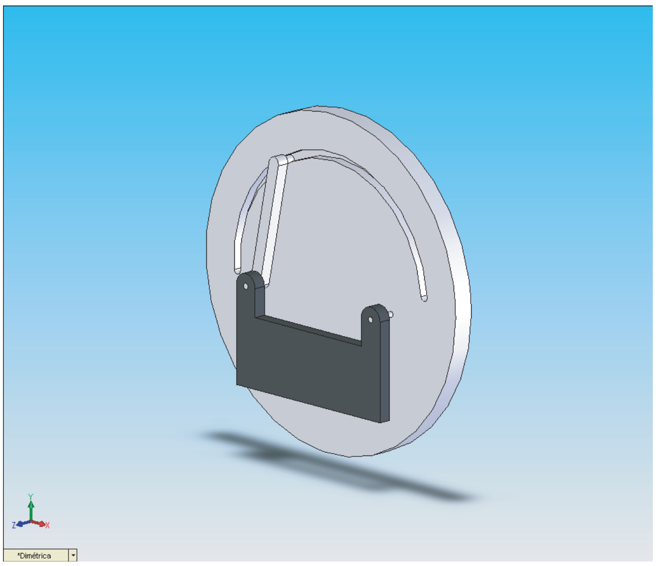
$A_C - A_A = \alpha_3 \times r_3 + \omega_3 \times \omega_3 \times r_3$

Midiendo obtenemos:

$A_p = \frac{2{,}391 \cdot 1{,}87}{2{,}805} = 1{,}59\ m/s^2$

6.7. PROBLEMA.

En la figura se muestra una rueda escéntrica con una guía por donde se desplaza el bulón de barra 2. Calcular la aceleración del punto B perteneciente a la barra 3 (rueda) si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_2 = 30^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$. La longitud de la barra 2 es de 3 m, del centro de la rueda al punto sobre el que gira 2 m, y desde ese punto al centro de giro de la barra 2 hay 4 m.



Resolución

Situamos los ejes intermedios con centro en A y rotando con 2.

$$\overrightarrow{A_A} = \underbrace{\overrightarrow{\omega_2} x \left(\overrightarrow{\omega_2} x \overrightarrow{r_{O_1A}}\right)}_{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c} 2\cos\theta_2 \\ 2\sin\theta_2 \\ 0 \end{array}\right\}} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_2} x \overrightarrow{r_{O_1A}}}_{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} x \left\{\begin{array}{c} 2\cos\theta_2 \\ 2\sin\theta_2 \\ 0 \end{array}\right\}} = \left\{\begin{array}{c} -4{,}09 \\ 1{,}09 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{A_A} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_3} x \left(\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{AB}}\right)}_{0, A=B} + \underbrace{\overrightarrow{\alpha_3} x \overrightarrow{r_{AB}}}_{0, A=B} + \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{v} = \overrightarrow{A_A} + \underbrace{\overrightarrow{a}}_{\parallel \overrightarrow{v}} + \underbrace{2\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{v}}_{\perp \overrightarrow{v}}$$

$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{\omega_3} x \left(\overrightarrow{\omega_3} x \overrightarrow{r_{O_2B}}\right) + \overrightarrow{\alpha_3} x \overrightarrow{r_{O_2B}}$$

conocemos la dirección y módulo de $\overrightarrow{v}$ ya que los calculamos en el análisis gráfico de velocidad y $\|\overrightarrow{\omega_3}\|$ que lo calculamos como:

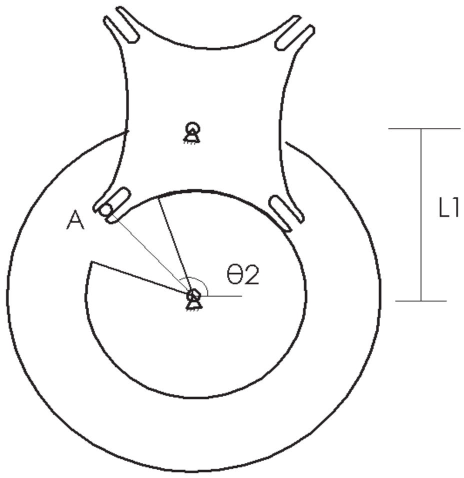
$$|\overrightarrow{\omega_3}| = \frac{\left|\overrightarrow{V_B}\right|}{|\overrightarrow{r_{O_2B}}|} = \frac{13{,}274}{3} = -4{,}42 rad/s$$

Aplicamos el factor de escala a la medida tomada en el gráfico y obtenemos una aceleración del punto B de:

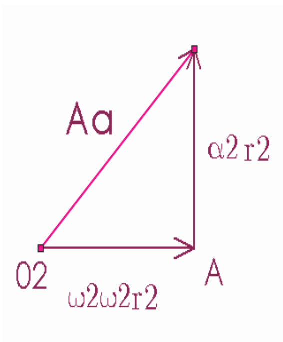
$$\overrightarrow{A_B} = \frac{590 \cdot 1}{2} = 295m/s^2$$

6.8. PROBLEMA.

La figura muestra la rueda de ginebra. Determinar la aceleración del punto A si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1rad/s$ y la aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$.
Datos: $L1 = 3m$; $O2A = 2m$.



Resolución



Para calcular la aceleración de A:

$A_A = A_T + A_N = \alpha_2 \times r_2 + \omega_2 \times \omega_2 \times r_2$

De modo que midiendo:

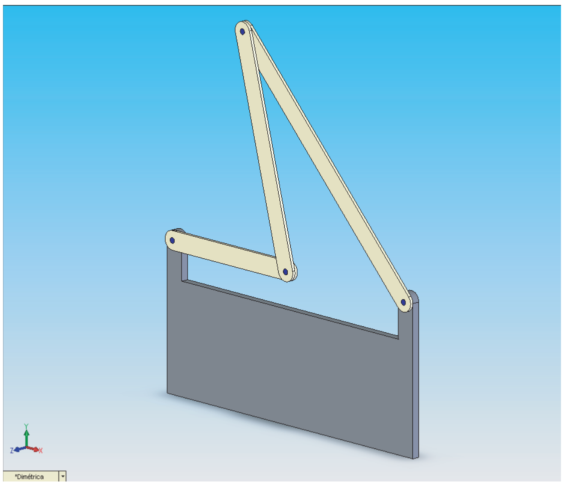
$\vec{A}_p = \frac{2{,}838 \cdot 12}{12} = 2{,}838 \ m/s^2$

Capítulo 7

RELACIÓN 7. ANÁLISIS DE ACELERACIÓN. Método Analítico.

7.1. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de cuatro barras. Para un ángulo de entrada $\theta_2 = 0^o$ y velocidad de esta barra $\omega_2 = 1rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$ calcular la velocidad de la barra 4 (barra de salida) aplicando el método analítico. Las dimensiones son:
$L_1 = 2m$, $L_2 = 3m$, $L_3 = 4m$, $L_4 = 4m$.



Resolución

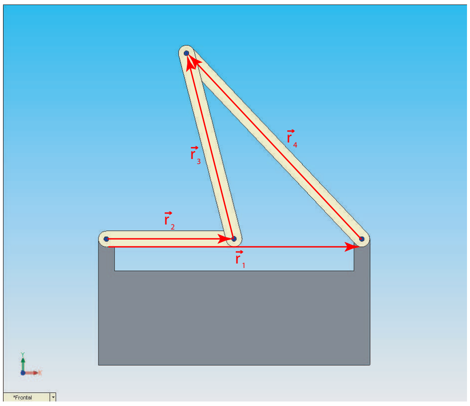
El procedimiento para resolver los problemas de aceleración con el método analítico es el mismo que el del problema de velocidad pero empleando las expresiones de aceleración, que resulta de derivar dos veces la definición compleja del vector como se puede ver a continuación:

$$\vec{r}_k = (\rho_k) \cdot e^{j\theta_k}$$

$$\vec{r}_k' = \left(\dot{\rho}_k + j\dot{\theta}_k\rho_k\right) \cdot e^{j\theta_k}$$

$$\vec{r}_k'' = \left(\ddot{\rho}_k + j\ddot{\theta}_k\rho_k + 2j\dot{\theta}_k\dot{\rho}_k - \dot{\theta}_k^2\rho_k\right) \cdot e^{j\theta_k}$$

Como ya tenemos resuelto el análisis de posición y de velocidad para la siguiente posición solo tenemos que resolver las ecuaciones obtenidas con la aceleración.



$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{r_4}$$

$$\overrightarrow{r_1}' + \overrightarrow{r_2}' + \overrightarrow{r_3}' = \overrightarrow{r_4}'$$

$$\overrightarrow{r_1}'' + \overrightarrow{r_2}'' + \overrightarrow{r_3}'' = \overrightarrow{r_4}''$$

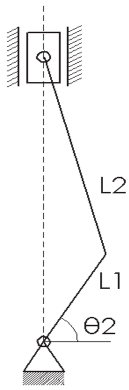
$$\left(\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2\right) \cdot e^{j\theta_2} + \left(\ddot{\rho}_3 + j\ddot{\theta}_3\rho_3 + 2j\dot{\theta}_3\dot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\right) \cdot e^{j\theta_3} = \left(\ddot{\rho}_4 + j\ddot{\theta}_4\rho_4 + 2j\dot{\theta}_4\dot{\rho}_4 - \dot{\theta}_4^2\rho_4\right) \cdot e^{j\theta_4}$$
$$(j \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) \cdot 1 + \left(j \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot 3 - 0{,}321 \cdot 3\right) \cdot (-0{,}25 + j \cdot 0{,}97) = \left(j\ddot{\theta}_4 \cdot 4 - 0{,}320 \cdot 4\right) \cdot (-0{,}69 + j \cdot 0{,}73)$$
$$\begin{cases} \ddot{\theta}_3 = 0{,}567 rad/s^2 \\ \ddot{\theta}_4 = -0{,}566 rad/s^2 \end{cases}$$

Calculamos la aceleración de B con el vector $\overrightarrow{r_4}$ y obtenemos:

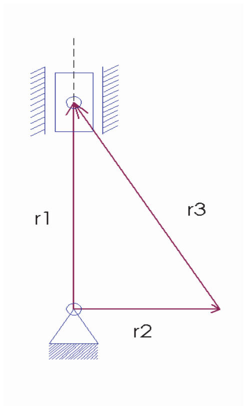
$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{r_4}'' = \left(\ddot{\rho}_4 + j\ddot{\theta}_4\rho_4 + 2j\dot{\theta}_4\dot{\rho}_4 - \dot{\theta}_4^2\rho_4\right) \cdot e^{j\theta_4} =$$
$$= (j \cdot (-0{,}566) \cdot 4 - 0{,}320 \cdot 4) \cdot (-0{,}69 + j \cdot 0{,}73) = \begin{Bmatrix} 1{,}214 \\ -1{,}34 \end{Bmatrix} m/s^2$$

7.2. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo biela-manivela. Determinar la velocidad del pistón si tenemos un ángulo de entrada $\theta_2 = 0$ y una velocidad de entrada $\omega_2 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$ aplicando el método analítico. Datos: $L1 = 2m, L2 = 4m$.



Resolución



Derivamos la ecuación de triangulación:

$(\ddot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2)e^{i\theta_2} + (2\dot{\rho}_2\dot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2\rho_2)ie^{i\theta_2} + (\ddot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3)e^{i\theta_3} + (2\dot{\rho}_3\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3)ie^{i\theta_3} = (\ddot{\rho}_1 - \dot{\theta}_1^2\rho_1)e^{i\theta_1} + (2\dot{\rho}_1\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_1\rho_1)ie^{i\theta_1}$

Como $\dot{\rho}_2 = \dot{\rho}_3 = \dot{\theta}_1 = 0$:

$$\begin{cases} \text{Re}al: \ -\dot{\theta}_2\rho_2 - \dot{\theta}_3\rho_3\cos\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 sen\theta_3 = 0 \\ \text{Im}ag: \ddot{\theta}_2\rho_2 - \dot{\theta}_3\rho_3 sen\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 cos\theta_3 = \ddot{\rho}_1 \end{cases}$$

Despejando y sustituyendo

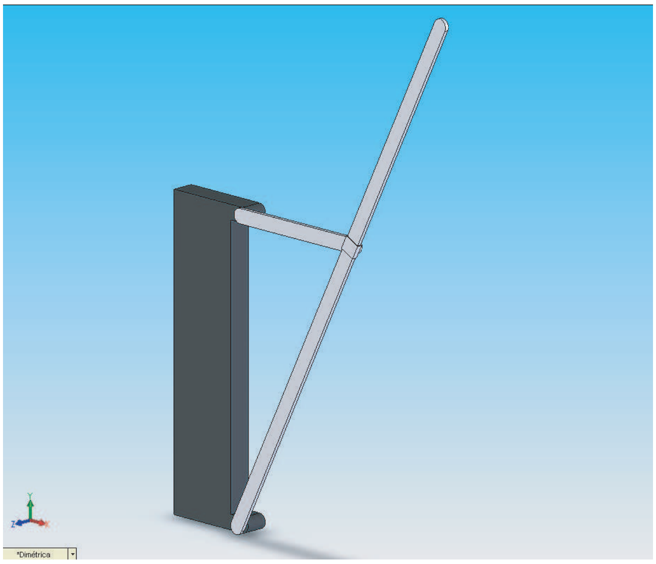
$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2\rho_2 sen\theta_2 - \omega_3^2\rho_3 cos\theta_3}{\rho_3 sen\theta_3} = -0{,}324\ rad/s^2$

$\ddot{\rho}_1 = \alpha_2\rho_2 sen\theta_2 + \alpha_3\rho_3 cos\theta_3 + \omega_3^2\rho_3 sen\theta_3 = 2{,}4\ m/s^2$

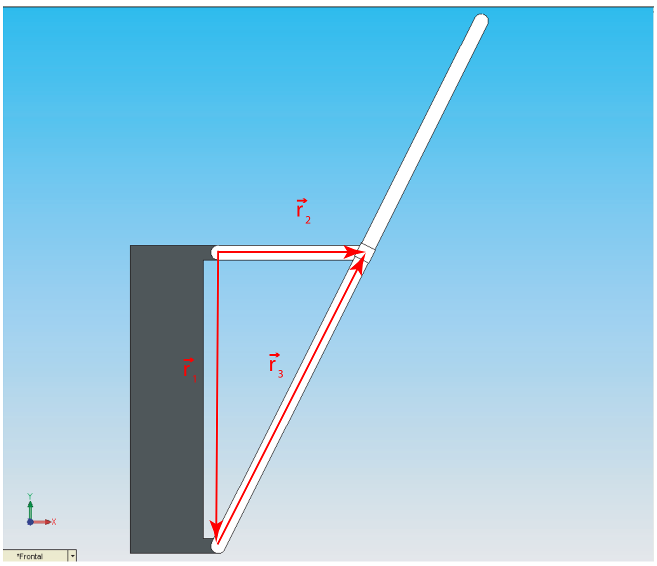
De modo que: $\vec{A}_P = \ddot{r}_2 = (\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2)e^{j\theta_2} = (0,3)$
$|A_P| = 3\ m/s^2$

7.3. PROBLEMA.

En la figura se muestra un mecanismo de retorno rápido. Calcular la velocidad del punto B (perteneciente a la barra 4 (barra larga)) para un ángulo de la barra de entrada de $\theta_2 = 30^o$ y $\omega_2 = 1rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$ aplicando el método analítico. Las dimensiones son barra de entrada 2 m, distancia entre centros 4 metros, barra 3 8 m.



Resolución



$$\vec{r}_2 = \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_2'' = \vec{r}_3''$$

$$\left(\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_2} = \left(\ddot{\rho}_3 + j\ddot{\theta}_3\rho_3 + 2j\dot{\theta}_3\dot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_3}$$

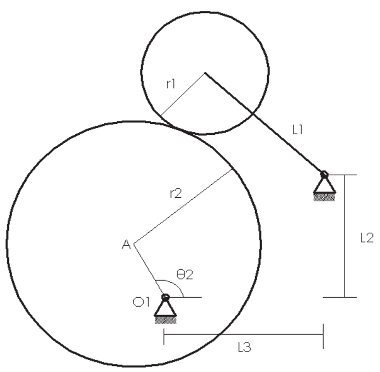
$$(0 + j \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot j \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) \cdot 1 = \left(\ddot{\rho}_3 + j \cdot \ddot{\theta}_3 \cdot 4{,}43 + 2 \cdot j \cdot 0{,}204 \cdot 1{,}79 - 0{,}041 \cdot 4{,}43\right) \cdot (0{,}45 + j \cdot 0{,}89)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_3 = 0{,}758 rad/s^2 \\ \ddot{\rho}_3 = 2{,}32 m/s^2 \end{cases}$$

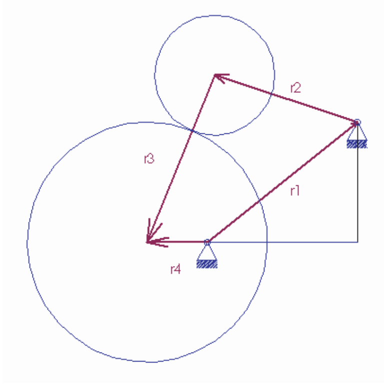
$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_B} &= \overrightarrow{r_3}'' = \left(\ddot{\rho}_3 + j\ddot{\theta}_3\rho_3 + 2j\dot{\theta}_3\dot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_3} = \\ &= (2{,}32 + j \cdot 0{,}758 \cdot 4{,}43 + 2 \cdot j \cdot 0{,}204 \cdot 1{,}79 - 0{,}041 \cdot 4{,}43) \cdot (0{,}45 + j \cdot 0{,}89) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} -0{,}47 \\ 2{,}69 \end{array} \right\} m/s^2 \end{aligned}$$

7.4. PROBLEMA.

La figura muestra una leva excéntrica. Calcular la velocidad del punto B de forma gráfica para un ángulo de entrada igual a 0º y $\omega_2 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$ aplicando el método analítico. Datos: $R1 = 2m$; $L1 = 5m$; $R2 = 4m$; $L2 = 4m$; $O1A = 2m$; $L3 = 5m$.



Resolución



$\ddot{r}_1 = 0;$
$(\ddot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2)e^{i\theta_2} + (2\dot{\rho}_2\dot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2\rho_2)ie^{i\theta_2} + (\ddot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3)e^{i\theta_3} + (2\dot{\rho}_3\dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3)ie^{i\theta_3} = (\ddot{\rho}_4 - \dot{\theta}_4^2\rho_4)e^{i\theta_4} + (2\dot{\rho}_4\dot{\theta}_4 + \ddot{\theta}_4\rho$

$$\begin{cases} \text{Real}: \ -\dot{\theta}_2^2\rho_2\cos\theta_2 + \alpha_2\rho_2 sen\theta_2 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\cos\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 sen\theta_3 = -\dot{\theta}_4^2\rho_4 \\ \text{Imag}: -\dot{\theta}_2^2\rho_2 sen\theta_2 + \alpha_2\rho_2\cos\theta_2 - \dot{\theta}_3^2\rho_3 sen\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 cos\theta_3 = \ddot{\theta}_4\rho_4 \end{cases}$$

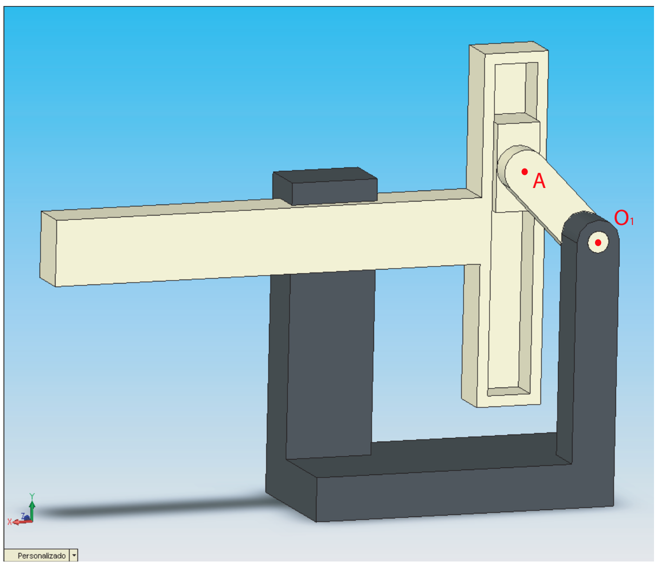
$$\alpha_2 = \frac{-\dot{\theta}_4^2\rho_4 + \dot{\theta}_2^2\rho_2\cos\theta_2 + \dot{\theta}_3^2\rho_3\cos\theta_3 - \ddot{\theta}_3\rho_3 sen\theta_3}{\rho_2 sen\theta_2} = 0{,}3327 rad/s^2$$

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{\ddot{\theta}_4\rho_4 + \dot{\theta}_2^2\rho_2 sen\theta_2 + \dot{\theta}_3^2\rho_3 sen\theta_3 - \alpha_2\rho_2\cos\theta_2}{\rho_3 cos\theta_3} = 1{,}026 rad/s^2$$

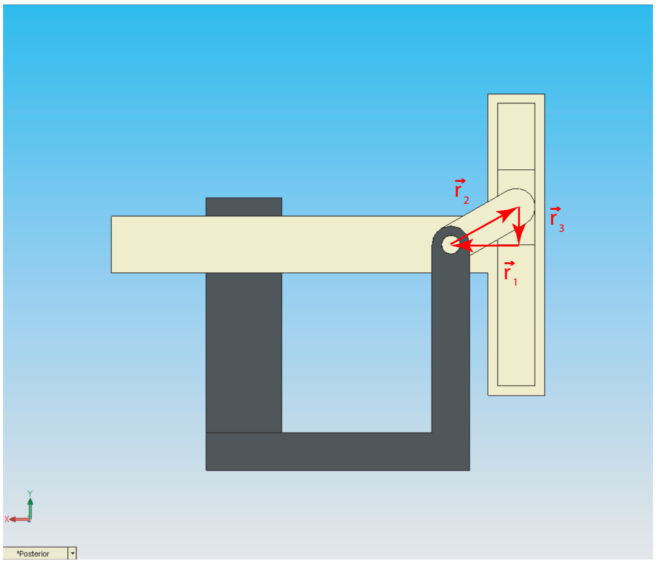
$\vec{A}_P = \ddot{r}_2 = (\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2)e^{j\theta_2} = (1{,}175, -1{,}795)$
$|A_P| = 2{,}146\ m/s^2$

7.5. PROBLEMA.

En la figura se muestra un yugo inglés. Calcular la velocidad del punto B (perteneciente a la barra 4) si el ángulo de la barra de entrada es$\theta_2 = 30^o$ y la velocidad $\omega_2 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$ aplicando el método analítico. Las dimensiones son $\overline{OP} = 4$ m.



Resolución



$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$$

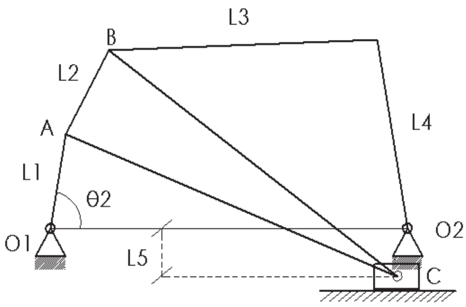
$$\vec{r_1}'' = \vec{r_2}'' + \vec{r_3}''$$
$$\left(\ddot{\rho}_1 + j\ddot{\theta}_1\rho_1 + 2j\dot{\theta}_1\dot{\rho}_1 - \dot{\theta}_1^2\rho_1\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_1} = \left(\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_2} + \left(\ddot{\rho}_3 + j\ddot{\theta}_3\rho_3 + 2j\dot{\theta}_3\dot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_3}$$

$$(\ddot{\rho}_1 + j\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot j\cdot 0\cdot 2 - 0\cdot 2)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_1} = (0 + j\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot j\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 4)\cdot(0{,}86 + j0{,}5) +$$
$$+ (\ddot{\rho}_3 + j\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot j\cdot 0\cdot 2{,}24 - 0\cdot 2)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_3}$$
$$\begin{cases} \ddot{\rho}_1 = 3{,}71 m/s^2 \\ \ddot{\rho}_3 = 5{,}23 m/s^2 \end{cases}$$

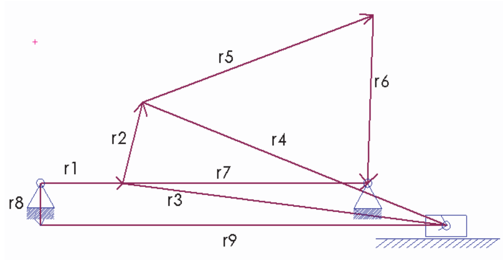
$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{r_1}'' = \left(\ddot{\rho}_1 + j\ddot{\theta}_1\rho_1 + 2j\dot{\theta}_1\dot{\rho}_1 - \dot{\theta}_1^2\rho_1\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_1} =$$
$$= (3{,}71 + j\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot j\cdot 0\cdot 2 - 0\cdot 2)\cdot(-1 + 0j) =$$
$$= \begin{Bmatrix} 5{,}46 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$

7.6. PROBLEMA.

Determinar la velocidad del punto C del mecanismo que se muestra en la figura aplicando el método analítico. El ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$.
Datos: $L1 = 2m$, $O1O2 = 8m$, $L2 = 2m$, $AC = 8m, L3 = 6m, BC = 8m, L4 = 4m, L5 = 1m$.



Resolución



$$\begin{cases} \text{Re}al: \ -\dot{\theta}_1^2\rho_1 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\cos\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 sen\theta_3 = \ddot{\rho}_9 \\ \text{Im}ag: -\ddot{\theta}_1^2\rho_1 - \dot{\theta}_3^2\rho_3 sen\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 cos\theta_3 = 0 \end{cases}$$

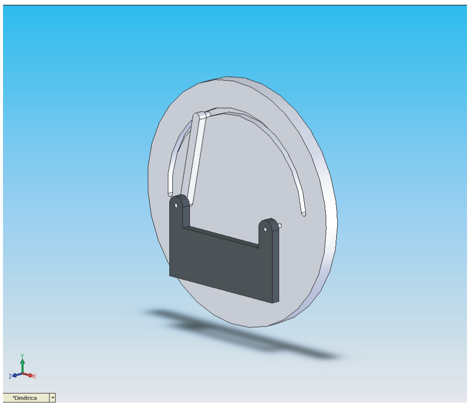
$$\ddot{\theta}_3 = \frac{-\ddot{\theta}_1^2\rho_1 + \dot{\theta}_3^2\rho_3 sen\theta_3}{\rho_3 cos\theta_3} = -0{,}126 rad/s^2$$

$$-\dot{\theta}_1^2\rho_1 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\cos\theta_3 + \ddot{\theta}_3\rho_3 sen\theta_3 = \ddot{\rho}_9 = -1{,}273 m/s^2$$

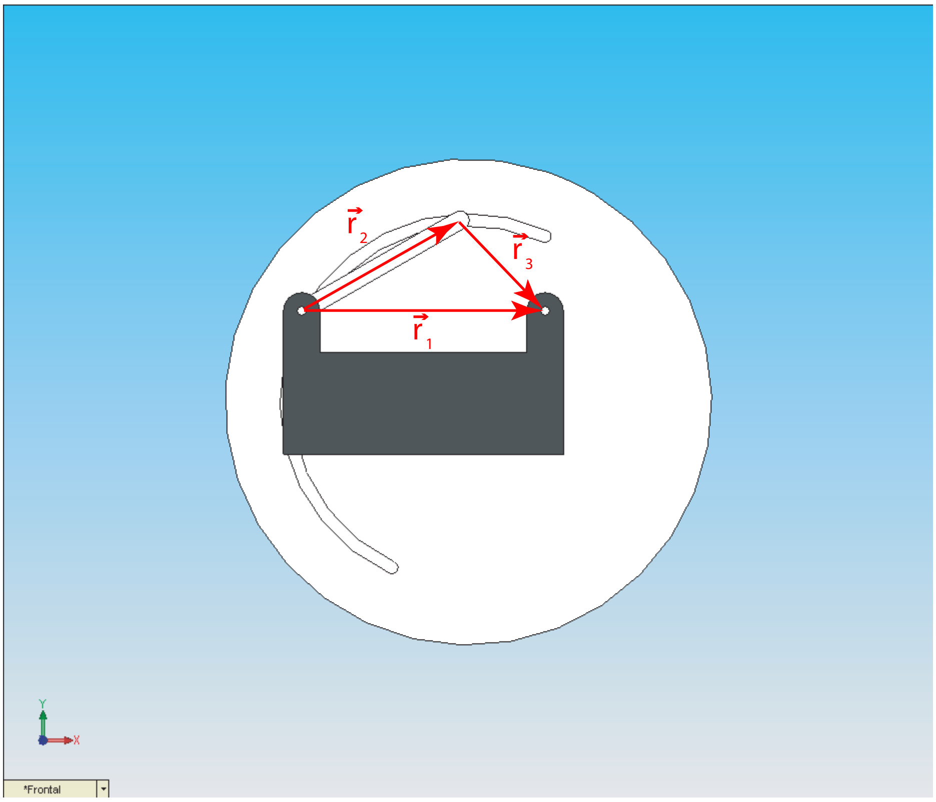
$$A_P = \ddot{r}_8 + \ddot{r}_9 = (\ddot{\rho}_9, 0) = (-1{,}273, 0)$$
$$|A_P| = 1{,}273\ m/s^2$$

7.7. PROBLEMA.

En la figura se muestra una rueda escéntrica con una guía por donde se desplaza el bulón de barra 2. Calcular la velocidad del punto B perteneciente a la barra 3 (rueda) si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_2 = 30^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1 rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1 rad/s^2$ aplicando el método analítico. La longitud de la barra 2 es de 3 m, del centro de la rueda al punto sobre el que gira 2 m, y desde ese punto al centro de giro de la barra 2 hay 4 m.



Resolución



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_1'' = \vec{r}_2'' + \vec{r}_3''$$

$$\left(\ddot{\rho}_1 + j\ddot{\theta}_1\rho_1 + 2j\dot{\theta}_1\dot{\rho}_1 - \dot{\theta}_1^2\rho_1\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_1} = \left(\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_2} + \left(\ddot{\rho}_3 + j\ddot{\theta}_3\rho_3 + 2j\dot{\theta}_3\dot{\rho}_3 - \dot{\theta}_3^2\rho_3\right)\cdot \mathrm{e}^{j\theta_3}$$

$$0 = (0 + j\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot j\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 3)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\cdot 0{,}5\right) + \left(\ddot{\rho}_3 + j\cdot\ddot{\theta}_3\cdot 2{,}053 + 2\cdot j\cdot 4{,}585\cdot(-8{,}50) - 4{,}585^2\cdot 2{,}053\right)\cdot$$
$$\cdot(-0{,}98 + j0{,}73)$$
$$\begin{cases} \ddot{\theta}_3 = rad/s^2 \\ \ddot{\rho}_3 = m/s^2 \end{cases}$$

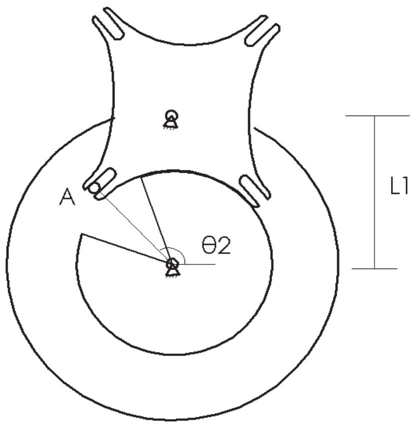
Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación de la aceleración del punto B:

$$\overrightarrow{A_B} = \overrightarrow{r_2}'' = \left(\ddot{\rho}_2 + j\ddot{\theta}_2\rho_2 + 2j\dot{\theta}_2\dot{\rho}_2 - \dot{\theta}_2^2\rho_2\right) \cdot \mathrm{e}^{j\theta_2} = \left\{ \quad \right\} m/s^2$$

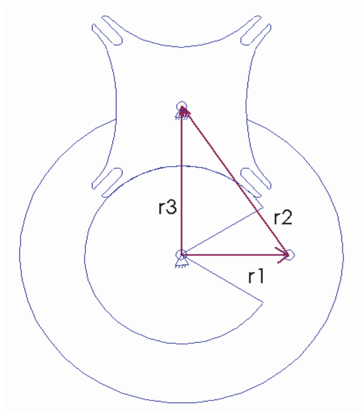
Como podemos ver no era necesario calcular los parámetros que hemos obtenido aunque pueden ser útiles para otro tipo de preguntas de otras velocidades y aceleraciones.

7.8. PROBLEMA.

La figura muestra la rueda de ginebra. Determinar la velocidad del punto A si el ángulo de la barra de entrada es $\theta_1 = 0^o$ y la velocidad angular $\omega_1 = 1rad/s$ y aceleración $\alpha_2 = 1rad/s^2$ aplicando el método analítico.
Datos: $L1 = 3m$; $O2A = 2m$.



Resolución



Para calcular la aceleración simplemente sustituimos:

$\vec{A}_p = \ddot{r}_2 = \rho_2\omega_2 + i\alpha_2\rho_2 = 2{,}838\ m/s^2$