

***PROBLEMARIO DE CIRCUITOS
ELÉCTRICOS II***

Directorio

DR. JOSÉ ENRIQUE VILLA RIVERA
Director General

DR. EFRÉN PARADA ARIAS
Secretario General

DRA. YOLOXÓCHITL BUSTAMANTE DÍEZ
Secretaria Académica

ING. MANUEL QUINTERO QUINTERO
Secretario de Apoyo Académico

DR. ÓSCAR ESCÁRCEGA NAVARRETE
Secretario de Extensión y Difusión

CP. RAÚL SÁNCHEZ ÁNGELES
Secretario de Administración

DR. JORGE VERDEJA LÓPEZ
Secretario Técnico

DR. LUIS ZEDILLO PONCE DE LEÓN
Secretario Ejecutivo de la Comisión de Operación
y Fomento de Actividades Académicas

ING. JESÚS ORTIZ GUTIÉRREZ
Secretario Ejecutivo del Patronato
de Obras e Instalaciones

LIC. ARTURO SALCIDO BELTRÁN
Director de Publicaciones

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA
MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD ZACATENCO**

***PROBLEMARIO DE CIRCUITOS
ELÉCTRICOS II***

Elvio Candelaria Cruz

Problematario de circuitos eléctricos II

Primera edición: 2004

D.R. © 2004 INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Dirección de Publicaciones
Tresguerras 27, 06040, México, DF

ISBN 970-36-0205-3

Impreso en México / *Printed in Mexico*



Al

M. en C. Arturo Cepeda Salinas

CONTENIDO

PRÓLOGO	11
----------------------	-----------

CAPÍTULO I. ESTRUCTURAS PASIVAS DE DOS TERMINALES	13
--	-----------

- Cálculo de impedancias
- Cálculo de admitancias
- Reducciones serie-paralelo
- Problemas complementarios

CAPÍTULO II. TEOREMAS DE REDES	53
---	-----------

- Divisor de voltaje
- Divisor de corriente
- Teorema de Thévenin
- Teorema de Norton
- Teorema del intercambio de fuentes
- Teorema de superposición
- Dualidad
- Problemas complementarios

CAPÍTULO III. VALORES MEDIOS Y POTENCIA	103
--	------------

- Valores medios de 1° y 2° orden
- Potencia compleja, aparente, activa y reactiva
- Factor de potencia
- Teorema de la máxima transferencia de potencia media
- Problemas complementarios

CAPÍTULO IV. RESONANCIA	131
--------------------------------------	------------

- Dependencia de la frecuencia
- Resonancia y antirresonancia
- Resonancia de un circuito RLC
- Factor de calidad, ancho de banda y selectividad de un circuito resonante
- Resonancia de circuitos de dos ramas
- Problemas complementarios

CAPÍTULO V. REDES CON MULTIFRECUENCIAS ----- 181

- Redes con fuentes senoidales de distintas frecuencias
- Redes con fuentes periódicas no senoidales. Series de Fourier
- Red auxiliar de C.D.
- Red auxiliar de C.A.
- Valores efectivos de corriente, voltaje y potencia media
- Problemas complementarios

CAPÍTULO VI. REDES DE DOS PUERTOS ----- 219

- Ecuaciones y representaciones con parámetros Z
- Ecuaciones y representaciones con parámetros Y
- Ecuaciones con parámetros de transmisión directos e inversos
- El transformador ideal
- Ecuaciones y representaciones con parámetros híbridos directos e inversos
- Equivalencias entre parámetros
- Conexiones fundamentales entre redes de dos puertos
- Problemas complementarios

BIBLIOGRAFÍA ----- 299

PRÓLOGO

Este trabajo es producto del Programa Académico de Año Sabático otorgado al autor durante el periodo 2001-2002. Externo mi agradecimiento al licenciado Francisco Ramírez Rodríguez, Coordinador General de Programas Académicos Especiales de la Secretaría Académica del Instituto Politécnico Nacional y al licenciado Alfredo Villafuerte Iturbide, responsable del Programa Año Sabático, por las atenciones que se sirvieron brindar al suscrito para hacer posible la realización de este trabajo.

El presente *Problemario de circuitos eléctricos II* está destinado a estudiantes de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica y carreras afines; tiene como finalidad servir de apoyo en su preparación profesional para el estudio de la Teoría de los Circuitos Eléctricos en los tópicos que se tratan.

Se ha pretendido facilitar la comprensión de los temas mediante el planteamiento, desarrollo y solución metódicos de problemas ilustrativos que permitan al estudiante ejercitar sus conocimientos teóricos y prácticos.

Para la resolución paso a paso de problemas de este trabajo se utilizaron, en gran parte, las técnicas de análisis de los métodos de mallas y nodos desarrollados por el doctor Enrique Bustamante Llaca en su importante obra *Modern Analysis of Alternating Current Networks*, por lo que se recomienda al estudiante conocer previamente estos métodos. Cabe mencionar que en dichos análisis se emplean letras minúsculas para denotar impedancias de mallas o admitancias de nodos y con letras mayúsculas las impedancias o admitancias de elementos. Asimismo gran parte de la simbología usada en este problemario es la misma de la obra citada.

Es mi convencimiento de que solamente el esfuerzo propio del estudiante hará de este trabajo un recurso didáctico provechoso.

Finalmente deseo expresar mi agradecimiento a José Juan Carbajal Hernández, pasante de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica por su apoyo e iniciativa en la captura del material de esta obra.

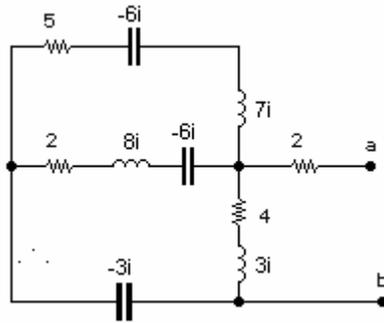
Elvio Candelaria Cruz.

CAPÍTULO I

ESTRUCTURAS PASIVAS DE DOS TERMINALES

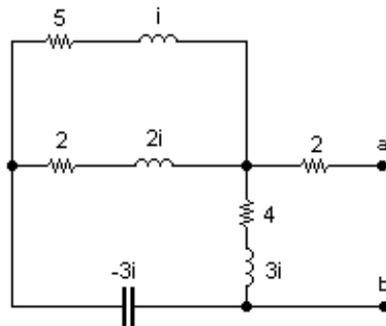
PROBLEMA 1

Calcule la impedancia equivalente entre las terminales a y b de la red mostrada:

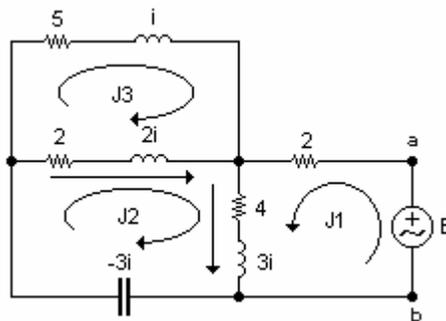


Solución:

1. Se hace una simplificación del circuito:



Se conecta una fuente de voltaje E y se asignan sentidos arbitrarios a elementos y a las corrientes de mallas; la fuente se conecta a las terminales de interés. La malla formada con la fuente de voltaje debe ser la malla 1:



2. Se calculan las impedancias propias y mutuas de mallas (aplicar las reglas del método de mallas):

$$Z_{11} = 6 + 3i$$

$$Z_{22} = 6 + 2i$$

$$Z_{33} = 7 + 3i$$

$$Z_{12} = 4 + 3i$$

$$Z_{13} = 0$$

$$Z_{23} = -2 - 2i$$

3. Aplicando la fórmula general:

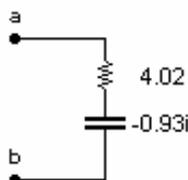
$$Z_{ab} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6 + 3i & 4 + 3i & 0 \\ 4 + 3i & 6 + 2i & -2 - 2i \\ 0 & -2 - 2i & 7 + 3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 + 2i & -2 - 2i \\ -2 - 2i & 7 + 3i \end{vmatrix}}$$

$$\det \mathbf{Z}_{m,r} = 167 + 63i = 178.5 \angle 20.6^\circ$$

$$\text{cof } Z_{11} = 36 + 24i = 43.2 \angle 33.7^\circ$$

$$Z_{ab} = \frac{178.5 \angle 20.6^\circ}{43.2 \angle 33.7^\circ} = 4.13 \angle -13.1^\circ = 4.02 - 0.93i \Omega$$

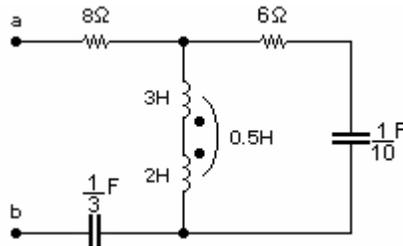
Este resultado significa que la red original es equivalente a:



Se sugiere al estudiante resolver este problema usando el método de reducción serie-paralelo.

PROBLEMA 2

Encuentre la impedancia equivalente entre las terminales *a* y *b* en la red dada, a la frecuencia angular $\omega=1\text{rad/seg}$.

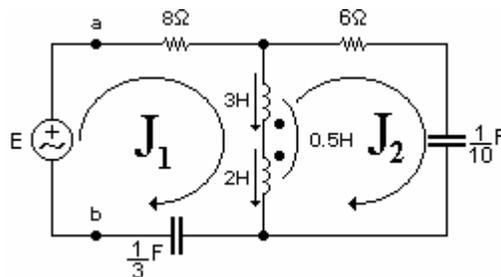


Solución:

1. Se conecta una fuente *E* entre las terminales *a* y *b*, con la cual se forma la malla 1. Se determina el signo de la inductancia mutua entre las bobinas *k* y *l*. Se asignan sentidos a elementos y a corrientes de malla.

$$L_{k,l} < 0$$

$$L_{k,l} = -0.5\text{Hy}$$



2. Se obtienen las impedancias propias y mutuas de mallas.

$$Z_{11} = 8 + i(1)(3 + 2) + \frac{3}{i(1)} + 2i(1)(-0.5) = 8 + i$$

$$Z_{22} = 6 + i(1)(3 + 2) + \frac{10}{i(1)} + 2i(1)(-0.5) = 6 - 6i$$

$$Z_{12} = -i(1)(3 + 2) - 2i(1)(-0.5) = -4i$$

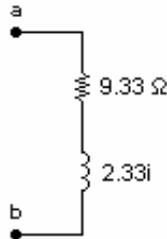
3. Se aplica la fórmula general:

$$Z_{eq} = Z_{ab} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8+i & -4i \\ -4i & 6-6i \end{vmatrix}}{6-6i}$$

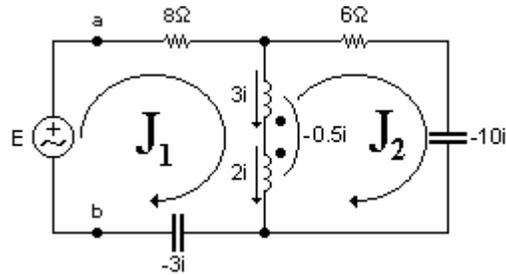
$$\det \mathbf{Z}_{m,r} = 70 - 42i$$

$$Z_{eq} = \frac{70-42i}{6-6i} = 9.33 + 2.33i$$

Esta impedancia se puede representar con elementos de circuito como se muestra:



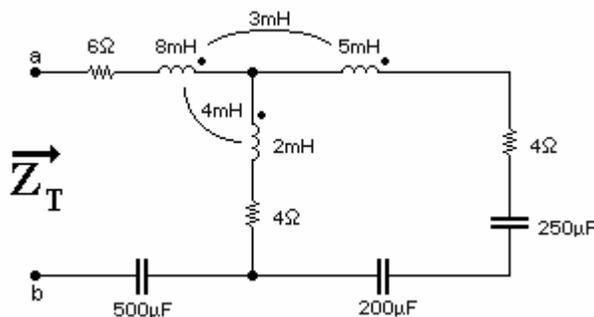
Es posible resolver este problema pasando del circuito original al circuito transformado, donde se indican las impedancias de elementos y aplicar así el método de mallas. El circuito transformado sería el que se muestra a continuación:



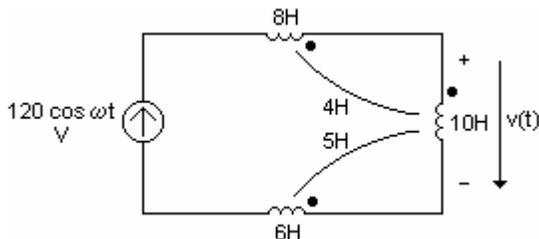
PROBLEMA 3

En la red mostrada calcule:

- La impedancia total Z_T , a la frecuencia angular $\omega=10^3$ rad/seg.
- El valor del inductor equivalente.

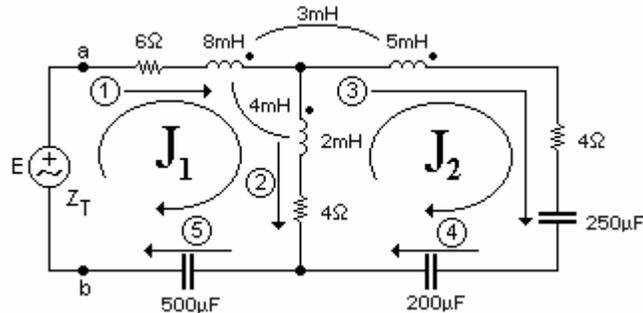


Observación: Una configuración con bobinas acopladas como se muestra en este circuito, no necesariamente debe tener acoplamiento entre todas ellas. Ver, por ej. Hayt William H.- Kemmerly Jack E. *Análisis de Circuitos en Ingeniería* problema 9, página 472, cuarta ed. – McGRAW HILL “Es posible disponer físicamente tres bobinas de tal manera que haya un acoplamiento mutuo entre las bobinas A y B y entre B y C, pero no entre A y C. Un arreglo así se muestra en la figura dada. Obténgase $v(t)$ ”.



O también ver Bustamante Llacca E. *Alternating Current Networks*, vol. I, ed. Limusa-Wiley, ej. 2, página 233 o Jiménez Garza Ramos Fernando *Problemas de Teoría de los Circuitos*, vol. 1, ed. Limusa, problema 1, página 72, entre otros ejemplos.

Solución: Habiendo conectado la fuente de voltaje E , la impedancia entre las terminales a y b (Z_T) se calcula como en los problemas anteriores.



Elvio Candelaria Cruz

19

De acuerdo con las marcas de polaridad en las bobinas:

$$L_{12} = -4 \times 10^{-3} \text{ Hy}$$

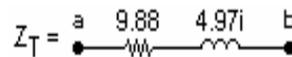
$$L_{13} = 3 \times 10^{-3} \text{ Hy}$$

$$Z_{11} = 6 + 4 + i10^3(8 \times 10^{-3}) + i10^3(2 \times 10^{-3}) + \frac{1}{i10^3 \times 500 \times 10^{-6}} + 2[i10^3(-4 \times 10^{-3})] = 10$$

$$Z_{22} = 4 + 4 + i10^3(2 + 5)10^{-3} + \frac{10^6}{i10^3 \times 200} + \frac{10^6}{i10^3 \times 250} = 8 - 2i$$

$$Z_{12} = -4 - i10^3 \times 2 \times 10^{-3} - i10^3(-4 \times 10^{-3}) + i10^3(3 \times 10^{-3}) = -4 + 5i$$

$$Z_T = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -4 + 5i \\ -4 + 5i & 8 - 2i \end{vmatrix}}{8 - 2i} = \frac{672 + 338i}{68} = 9.88 + 4.97i$$



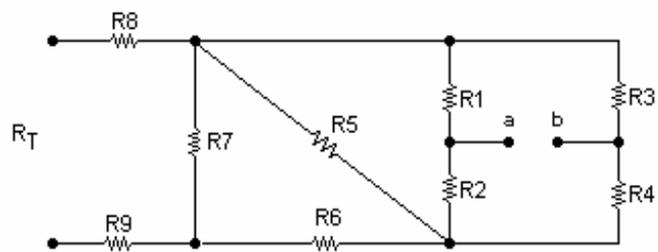
El valor de la bobina puede calcularse a partir de su impedancia:

$$Z_L = i\omega L = i(10^3)L = 4.97i \quad \therefore L = 4.97/10^3 = 4.97 \text{ mHy}$$

PROBLEMA 4

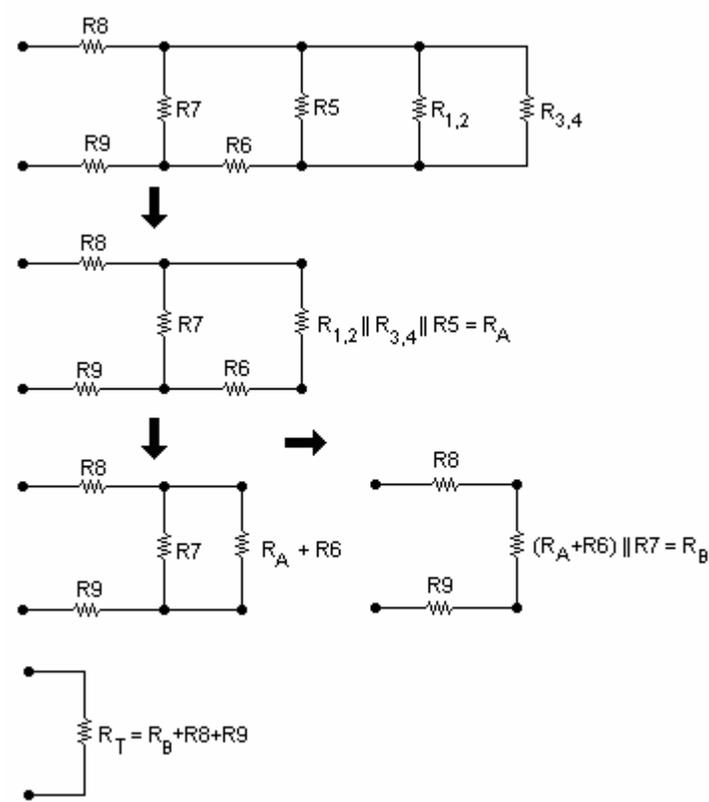
Encuentre la resistencia total R_T indicada que presenta el circuito mostrado cuando:

- a y b están en circuito abierto; use reducción serie-paralelo.
- a y b están en corto circuito; use reducción serie-paralelo.

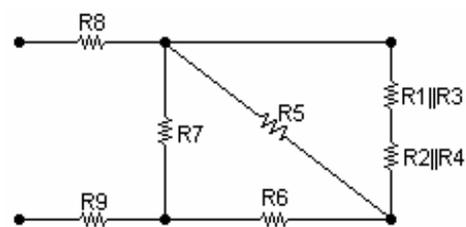


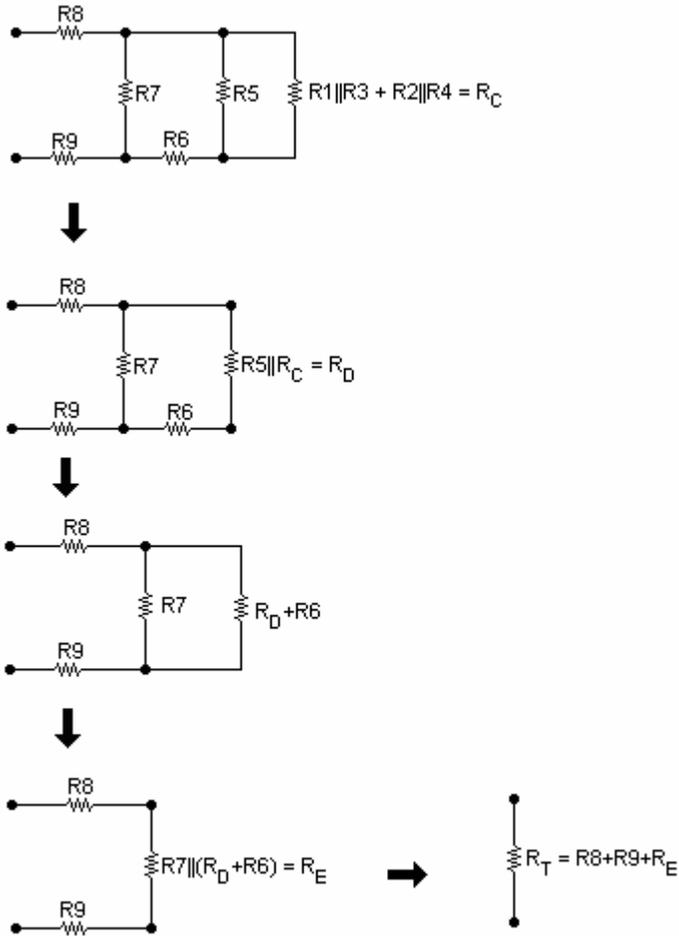
Solución:

a)



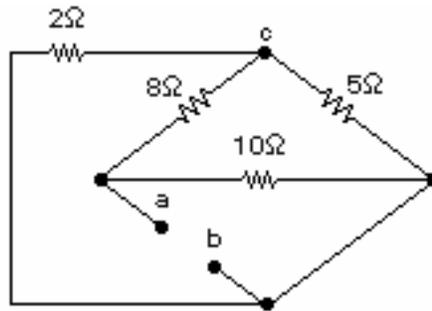
b)



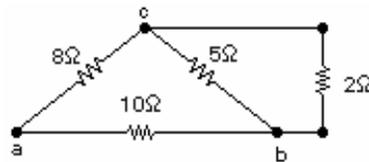


PROBLEMA 5

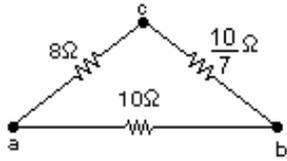
En el siguiente circuito calcule R_{ab} .



Solución: En este problema es fácil ver que un extremo del resistor de 5Ω es el punto b , por lo que el circuito puede dibujarse como:



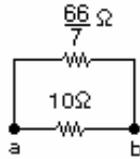
este circuito se puede reducir a:



donde $10/7$ es el paralelo de los resistores de 5Ω y 2Ω :
 $5||2=10/7$

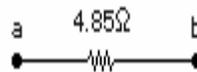
quedando 8Ω en serie con $(10/7)\Omega$:

$$8 + (10/7) = 56/7 + 10/7 = 66/7$$



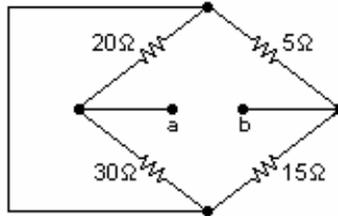
el resistor equivalente es:

$$R_{ab} = 66/7 \parallel 10 = 4.85 \Omega$$

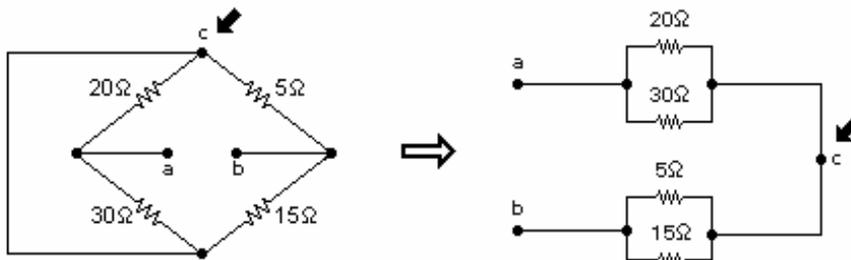


PROBLEMA 6

Calcule R_{ab} en el siguiente circuito.



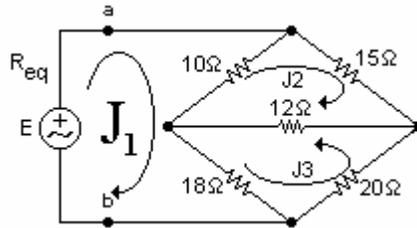
Solución: Para resolver este tipo de problemas podemos auxiliarnos de un punto o puntos exteriores y rehacer el circuito observando qué elementos se encuentran conectados entre los puntos de referencia:



$$R_{ab} = \frac{(20)(30)}{20 + 30} + \frac{(5)(15)}{5 + 15} = 15.75\Omega$$

PROBLEMA 7

Calcule R_{eq} entre las terminales a y b .



Solución:

$$Z_{T1} = 28$$

$$Z_{T2} = 37$$

$$Z_{T3} = 50$$

$$Z_{T2} = -10$$

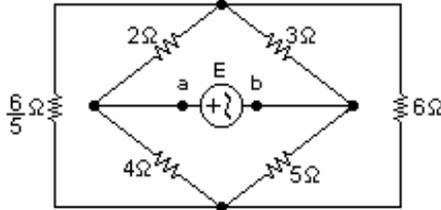
$$Z_{T3} = 18$$

$$Z_{T3} = 12$$

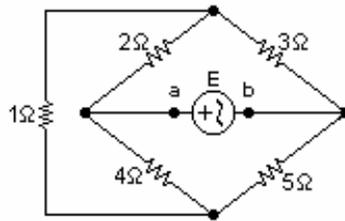
$$R_{eq} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{T1}} = \frac{\begin{vmatrix} 28 & -10 & 18 \\ -10 & 37 & 12 \\ 18 & 12 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 37 & 12 \\ 12 & 50 \end{vmatrix}} = 15.50\Omega$$

PROBLEMA 8

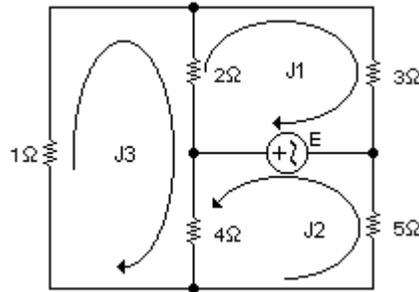
En el siguiente circuito calcule Z_{ab} :



Solución: Este problema puede resolverse a partir de 4 mallas, sin embargo las dos resistencias de la periferia están en paralelo y pueden reducirse a una sola:



o si se desea darle la forma siguiente:



$$Z_{ab} = \frac{E}{J_1 + J_2}$$

Aplicando el método de mallas para encontrar J_1 y J_2 :

$$\begin{aligned} Z_{T1} &= 5 & Z_{T2} &= 0 \\ Z_{T2} &= 9 & Z_{T3} &= -2 \\ Z_{T3} &= 7 & Z_{T3} &= 4 \end{aligned}$$

$$5 \mathbf{J}_1 + 0 \mathbf{J}_2 - 2 \mathbf{J}_3 = E$$

$$0 \mathbf{J}_1 + 9 \mathbf{J}_2 + 4 \mathbf{J}_3 = E$$

$$-2 \mathbf{J}_1 + 4 \mathbf{J}_2 + 7 \mathbf{J}_3 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 199$$

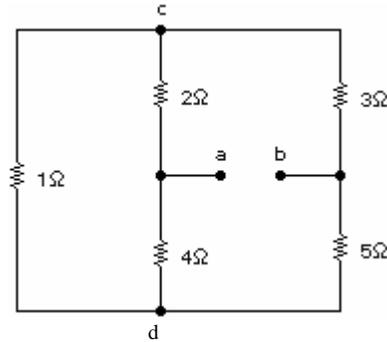
$$\mathbf{J}_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & 0 & -2 \\ E & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{199} = \frac{39E}{199}$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & E & -2 \\ 0 & E & 4 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{199} = \frac{23E}{199}$$

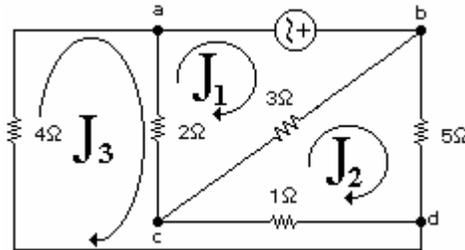
$$\mathbf{Z}_{ab} = \frac{E}{\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2} = \frac{E}{\frac{39E}{199} + \frac{23E}{199}} = 3.2\Omega$$

PROBLEMA 9

Calcule la impedancia total entre las terminales *a* y *b* del siguiente circuito:



Solución: Este circuito puede configurarse de la forma que se muestra tomando los puntos *a*, *b*, *c* y *d* como referencia:



$$Z_{11} = 5$$

$$Z_{22} = 9$$

$$Z_{33} = 7$$

$$Z_{12} = -3$$

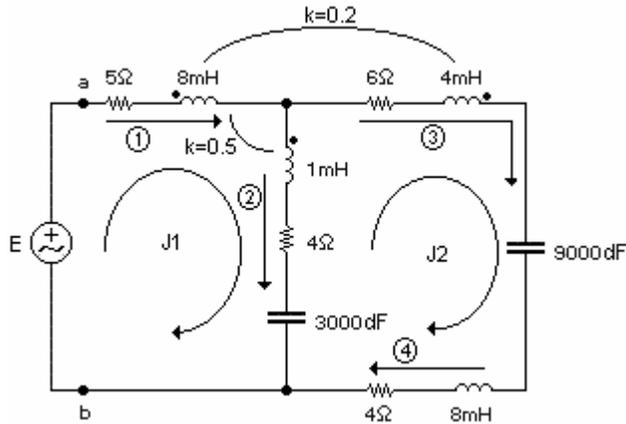
$$Z_{13} = -2$$

$$Z_{23} = -1$$

$$Z_{ab} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{199}{62} = 3.2\Omega$$

PROBLEMA 10

Encuentre la impedancia equivalente entre las terminales *a* y *b* de la red dada, a la frecuencia $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



Solución: Obtendremos L_{12} y L_{13} de la ecuación para el coeficiente de acoplamiento entre dos bobinas:

$$k = \frac{L_{kl}}{\sqrt{L_k L_l}} \therefore L_{kl} = k\sqrt{L_k L_l}$$

De acuerdo con las marcas de polaridad:

$$L_{12} > 0$$

$$L_{13} < 0$$

$$L_{12} = 0.5\sqrt{8 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-3}} = 1.41 \times 10^{-3} \text{ Hy}$$

$$L_{13} = -0.2\sqrt{8 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-3}} = -1.13 \times 10^{-3} \text{ Hy}$$

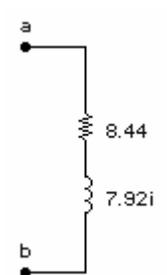
$$Z_{T1} = 9 + i(10^3)(9 \times 10^{-3}) + \frac{(3 \times 10^3)}{i10^3} + 2i(10^3)(1.41 \times 10^{-3}) = 9 + 8.82i$$

$$Z_{T2} = 14 + i(10^3)(13 \times 10^{-3}) + \frac{3 \times 10^3}{i10^3} + \frac{9 \times 10^3}{i10^3} = 14 + i$$

$$Z_{T3} = -4 - i(10^3 \times 10^{-3}) - \frac{3 \times 10^3}{i \times 10^3} - i10^3(1.41 \times 10^{-3}) + i10^3(-1.13 \times 10^{-3}) = -4 - 0.54i$$

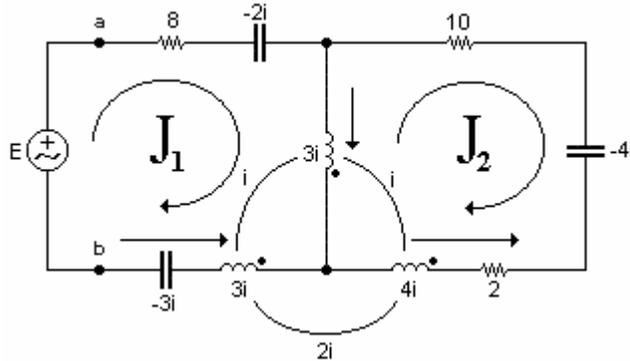
$$Z_{eq} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 9 + 8.82i & -4 - 0.54i \\ -4 - 0.54i & 14 + i \end{vmatrix}}{14 + i} = \frac{110.29 + 119.34i}{14 + i} = 8.44 + 7.92i \ \Omega$$

El circuito original queda reducido a la siguiente forma:



PROBLEMA 11

Calcule la impedancia equivalente entre las terminales *a* y *b*:



Solución: Los sentidos de las bobinas fueron asignados de forma tal que fueran congruentes con el signo positivo de cada una de las impedancias mutuas. Una impedancia mutua positiva conlleva una inductancia mutua positiva.

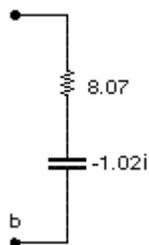
$$Z_{T1} = 8 - 5i + 6i - 2i = 8 - i$$

$$Z_{T2} = 12 - 4i + 7i + 2i = 12 + 5i$$

$$Z_{T2} = -3i + i - i + 2i = -i$$

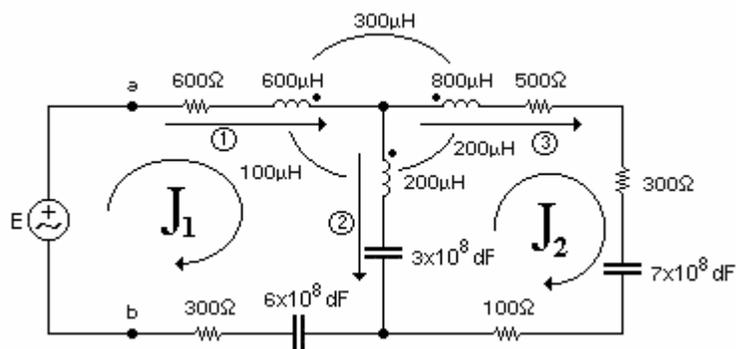
$$Z_{eq} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{T1}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-i & -i \\ -i & 12+5i \end{vmatrix}}{12+5i} = \frac{102+28i}{12+5i} = 8.07 - 1.02i \quad \Omega$$

La impedancia equivalente es:



PROBLEMA 12

Calcule las impedancias propias y mutuas de mallas, que permitan encontrar la Z_{eq} de la red mostrada, a una frecuencia angular de 10^6 rad/seg .



Solución:

$$L_{12} < 0 = -10^{-4} \text{ Hy}$$

$$L_{13} < 0 = -3 \times 10^{-4} \text{ Hy}$$

$$L_{23} > 0 = 2 \times 10^{-4} \text{ Hy}$$

$$Z_{T1} = 900 + \frac{6 \times 10^8 + 3 \times 10^8}{i \times 10^6} + i(10^6)(6 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-4}) + 2(i)(10^6)(-10^{-4}) = 900 - 3 \times 10^2 i$$

$$Z_{22} = 900 + \frac{3 \times 10^8 + 7 \times 10^8}{i \times 10^6} + i(10^6)(2 \times 10^{-4} + 8 \times 10^{-4}) - 2(i)(10^6)(2 \times 10^{-4}) = 900 - 4 \times 10^2 i$$

$$Z_{T2} = -\frac{3 \times 10^8}{i \times 10^6} - i(10^6)(2 \times 10^{-4}) - i(10^6)(-10^{-4}) + i(10^6)(2 \times 10^{-4}) + i(10^6)(-3 \times 10^{-4}) = 100i$$

Si se prefiere obtener el circuito transformado, de acuerdo con los sentidos asignados arbitrariamente a los elementos, las impedancias mutuas entre elementos son:

$$Z_{12} = i10^6(-10^{-4}) = -100i$$

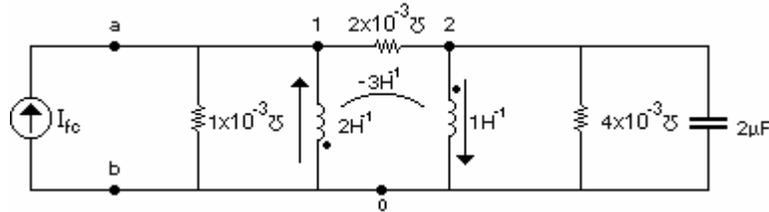
$$Z_{13} = i10^6(-3 \times 10^{-4}) = -300i$$

$$Z_{23} = i10^6(2 \times 10^{-4}) = 200i$$

y las impedancias de mallas se obtienen como las ecuaciones de arriba lo indican.

PROBLEMA 13

Encuentre las admitancias propias y mutuas de nodos de la red mostrada que permitan calcular la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b*, a la frecuencia $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



Solución: Se conecta una fuente de corriente I_{fc} entre las terminales *a* y *b*. Se tendrá la terminal “*a*” conectada al nodo 1 y la terminal “*b*” a la base de la componente. Se observa que por tener una invertancia mutua negativa la inductancia mutua ha de ser positiva, por lo que el sentido de los elementos es el que se muestra.

La fórmula que se aplica es:

$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}}{y_{22}}$$

Cálculo de las admitancias de nodos:

$$y_{11} = 10^{-3} + \frac{2}{i10^3} + 2x10^{-3} = 3x10^{-3} - 2x10^{-3}i$$

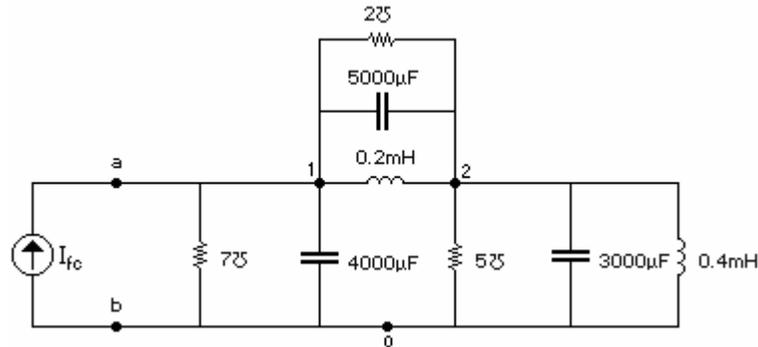
$$y_{22} = 4x10^{-3} + 2x10^{-3} + \frac{1}{i10^3} + i(10^3)(2x10^{-6}) = 6x10^{-3} + 10^{-3}i$$

$$y_{12} = -2x10^{-3} - \left(\frac{-3}{i10^3} \right) = -2x10^{-3} - 3x10^{-3}i$$

Se sustituyen valores en Y_{ab} .

PROBLEMA 14

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b* en el circuito mostrado, a la frecuencia $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



Solución: La terminal “a” deberá ser el nodo 1, donde se conecte la fuente de corriente.

$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}}{y_{22}}$$

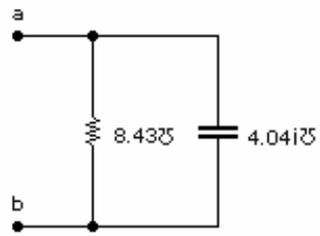
$$y_{11} = 7 + 2 + i(10^3)(4000 \times 10^{-6}) + i(10^3)(5000 \times 10^{-6}) + \frac{1}{i(10^3)(0.2 \times 10^{-3})} = 9 + 4i$$

$$y_{22} = 5 + 2 + i(10^3)(5000 \times 10^{-6}) + i(10^3)(3000 \times 10^{-6}) + \frac{1}{i(10^3)(0.2 \times 10^{-3})} + \frac{1}{i(10^3)(0.4 \times 10^{-3})} = 7 + 0.5i$$

$$y_{12} = -2 - i(10^3)(5000 \times 10^{-6}) - \frac{1}{i(10^3)(0.2 \times 10^{-3})} = -2$$

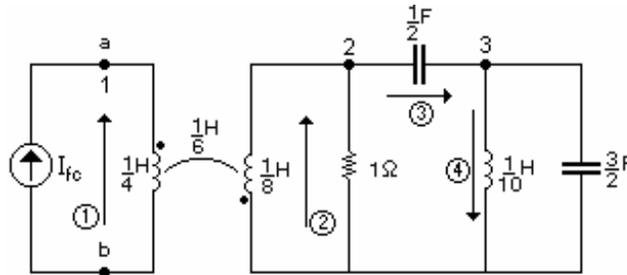
$$Y_{ab} = \frac{\begin{vmatrix} 9 + 4i & -2 \\ -2 & 7 + 0.5i \end{vmatrix}}{7 + 0.5i} = \frac{57 + 32.5i}{7 + 0.5i} = 8.43 + 4.04i$$

Este resultado significa que la red original es equivalente a:



PROBLEMA 15

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b*, a la frecuencia $\omega=2$ rad/seg.



Solución:

$$L_{12} = -\frac{1}{6} \text{Hy}$$

$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}$$

Calcularemos las admitancias propias y mutuas de nodos:

$$y_{11} = \frac{\Gamma_1}{i\omega}$$

$$y_{22} = G_2 + i\omega C_3 + \frac{\Gamma_2}{i\omega}$$

$$y_{33} = i\omega(C_3 + C_4) + \frac{\Gamma_4}{i\omega}$$

$$y_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{i\omega}$$

$$y_{13} = 0$$

$$y_{23} = -i\omega C_3$$

Se requiere conocer el valor de Γ_1 , Γ_2 , Γ_4 y Γ_{12} . Procederemos a calcular el valor de estas invertancias mediante la siguiente fórmula:

$$\Gamma_{kl} = \frac{\text{cof } L_{kl}}{\det L_{kl}} = \frac{\text{cof } L_{kl}}{\Delta}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32} - \frac{1}{36}} = 36 \text{ Yrnehs}$$

$$\Gamma_{22} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1152}{4}} = 72 \text{ Yrnehs}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{-\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{4}{1152}} = 48 \text{ Yrnehs}$$

Al sustituir valores:

$$y_{11} = \frac{36}{2i} = -18i$$

$$y_{22} = 1 + i(2)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{72}{2i} = 1 - 35i$$

$$y_{33} = i(2)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{10}{2i} = -i$$

$$y_{12} = \frac{48}{2i} = -24i$$

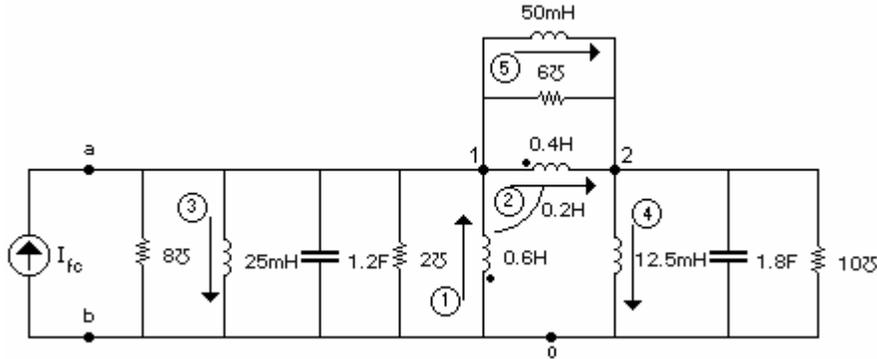
$$y_{13} = 0$$

$$y_{2,3} = -i(2)\left(\frac{1}{2}\right) = -i$$

$$Y_{ab} = \frac{\begin{vmatrix} -18i & -24i & 0 \\ -24i & 1-35i & -i \\ 0 & -i & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-35i & -i \\ -i & -i \end{vmatrix}} = \frac{-18+36i}{-34-i} = 0.497 - 1.073i$$

PROBLEMA 16

Encuentre la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b* en el circuito mostrado, a la frecuencia $\omega=10 \text{ rad/seg}$.



Solución: Se asignan sentidos arbitrarios a las dos bobinas acopladas para determinar $L_{12} = + 0.2\text{Hy}$. Calcularemos primeramente las invertancias propias y mutua de las dos bobinas acopladas 1 y 2 ya que dichas invertancias se necesitarán para poder calcular las admitancias.

$$\Gamma_{kl} = \frac{\text{cof } L_{kl}}{\Delta}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{\text{cof } L_{11}}{\Delta} = \frac{0.4}{\begin{vmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{vmatrix}} = \frac{0.4}{0.2} = 2 \text{ Yrnehs}$$

$$\Gamma_{22} = \frac{\text{cof } L_{22}}{\Delta} = \frac{0.6}{0.2} = 3 \text{ Yrnehs}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{\text{cof } L_{12}}{\Delta} = \frac{-0.2}{0.2} = -1 \text{ Yrneh}$$

Las admitancias propias de los elementos son:

$$Y_1 = \frac{\Gamma_{11}}{i\omega} = \frac{2}{i(10)} = -0.2i$$

$$Y_2 = \frac{\Gamma_{22}}{i\omega} = \frac{3}{i(10)} = -0.3i$$

$$Y_3 = 8 + 2 + i(10)(1.2) + \frac{1}{\frac{25 \times 10^{-3}}{i10}} = 10 + 8i$$

$$Y_4 = 10 + i(10)(1.8) + \frac{1}{\frac{12.5 \times 10^{-3}}{i10}} = 10 + 10i$$

$$Y_5 = 6 + \frac{1}{\frac{50 \times 10^{-3}}{i10}} = 6 - 2i$$

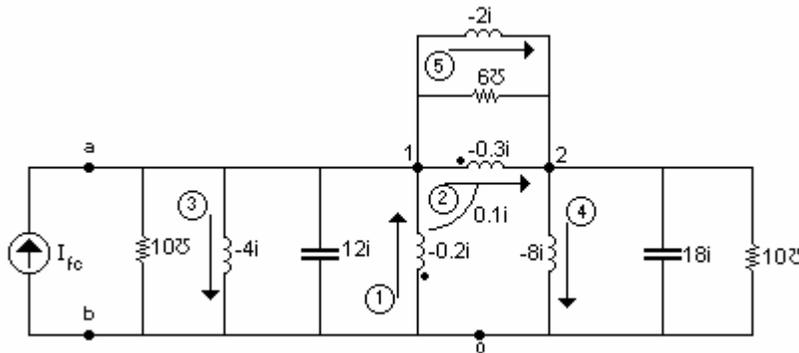
La admitancia mutua entre el elemento 1 y el elemento 2 se calcula mediante

$$Y_{kl} = \frac{\Gamma_{kl}}{i\omega}$$

$$Y_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{i\omega} = \frac{-1}{10i} = 0.1i$$

Obsérvese que la invertancia Γ_{12} es de signo contrario a la inductancia L_{12} .

Podemos representar el circuito original mediante admitancias, obteniendo:



Las admitancias de nodos son:

$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5 - 2Y_{12} = -0.2i - 0.3i + 10 + 8i + 6 - 2i - 2(0.1i) = 16 + 5.3i$$

$$Y_{22} = Y_2 + Y_4 + Y_5 = -0.3i + 10 + 10i + 6 - 2i = 16 + 7.7i$$

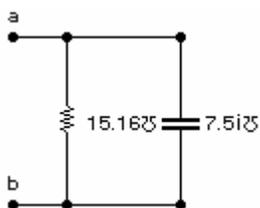
$$Y_{12} = -Y_2 - Y_5 + Y_{12} = -(-0.3i) - 6 + 2i + 0.1i = -6 + 2.4i$$

Aplicando la fórmula general:

$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}}$$

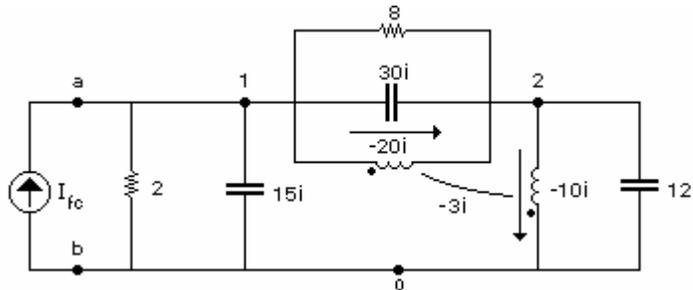
$$Y_{ab} = \frac{\begin{vmatrix} 16 + 5.3i & -6 + 2.4i \\ -6 + 2.4i & 16 + 7.7i \end{vmatrix}}{16 + 7.7i} = \frac{184.95 + 236.8i}{16 + 7.7i} = \frac{300.46 \angle 52^\circ}{17.75 \angle 25.69^\circ} = 16.92 \angle 26.31^\circ = 15.16 + 7.5i$$

Lo que significa que la admitancia total equivale al siguiente elemento paralelo:



PROBLEMA 17

Calcule Y_{ab} en el circuito mostrado.



Solución: De acuerdo con las marcas de polaridad, los sentidos de los elementos acoplados que se muestran cumplen con $L_{kl} < 0$, lo que origina una invertancia mutua positiva y, consecuentemente, una admitancia mutua negativa:

recordar que $Y_{kl} = \frac{\Gamma_{kl}}{i\omega} = -\frac{(\Gamma_{kl})}{\omega} i$.

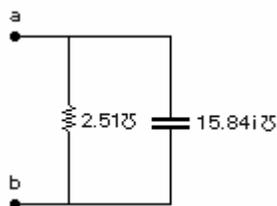
$$y_{11} = 2 + 8 + 15i + 30i - 20i = 10 + 25i$$

$$y_{22} = 8 + 30i + 12i - 20i - 10i - 2(-3i) = 8 + 18i$$

$$y_{12} = -8 - 30i + 20i + (-3i) = -8 - 13i$$

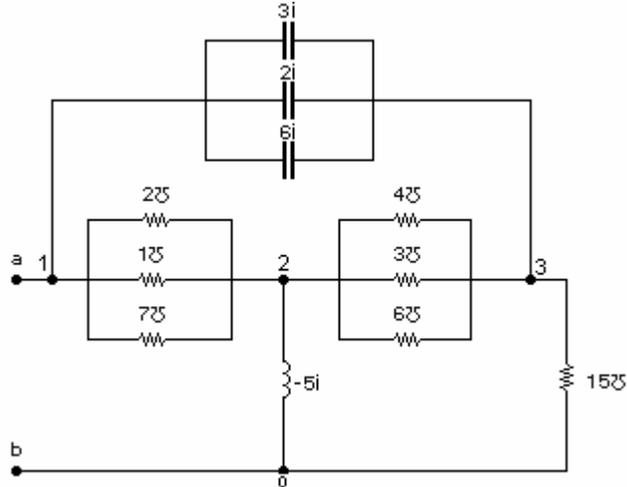
$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 + 25i & -8 - 13i \\ -8 - 13i & 8 + 18i \end{vmatrix}}{8 + 18i} = \frac{-265 + 172i}{8 + 18i} = 2.51 + 15.84i$$

El circuito original queda reducido a la siguiente forma:

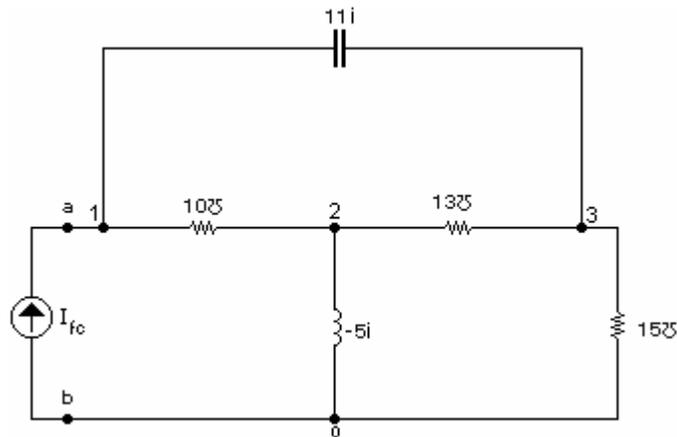


PROBLEMA 18

Encuentre las admitancias de nodos de la red mostrada que permitan calcular la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b*.



Solución: Podemos reducir el circuito utilizando reducción serie-paralelo entre conductancias y capacitores.



En este circuito no es posible aplicar reducción serie-paralelo, por lo que aplicaríamos la fórmula general ya conocida:

$$y_{11} = 10 + 11i$$

$$y_{22} = 10 + 13 - 5i = 23 - 5i$$

$$y_{33} = 28 + 11i$$

$$y_{12} = -10$$

$$y_{13} = -11i$$

$$y_{23} = -13$$

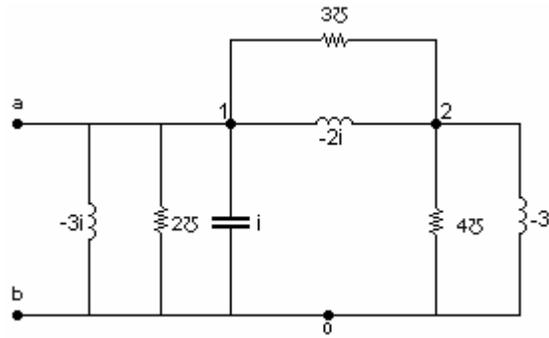
42

$$Y_{ab} = \frac{\det y_{n,p}}{\text{cof } y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}$$

PROBLEMA 19

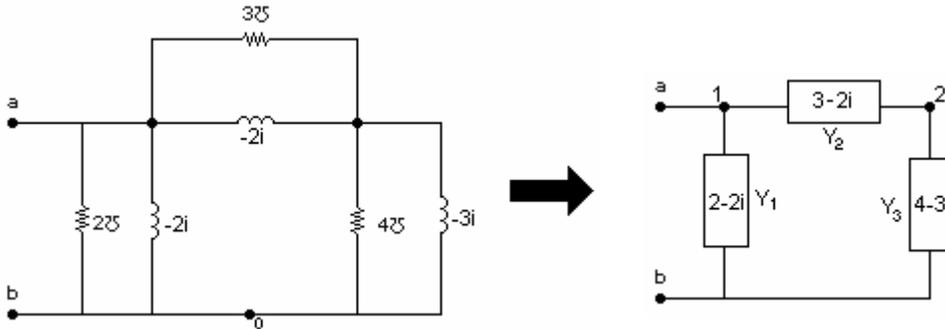
Encuentre la admitancia Y_{ab} del circuito mostrado:

- Por reducción serie-paralelo.
- Aplicando la fórmula general.



Solución:

a)



Puede observarse que la admitancia de $3-2i$ está en serie con la de $4-3i$.

$$Y_{ab} = Y_1 + \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3}$$

$$\frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3} = \frac{(3-2i)(4-3i)}{3-2i+4-3i} = \frac{6-17i}{7-5i} = 1.71-1.2i$$

$$Y_{ab} = Y_1 + \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3} = 2-2i + 1.71-1.2i = 3.71-3.2i$$

b)

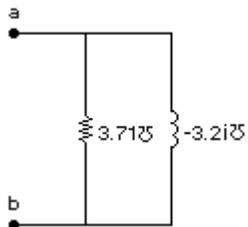
$$y_{11} = 5 - 4i$$

$$y_{22} = 7 - 5i$$

$$y_{12} = -3 + 2i$$

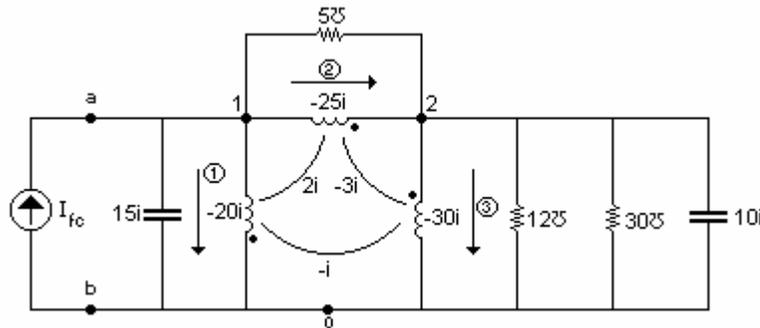
$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 - 4i & -3 + 2i \\ -3 + 2i & 7 - 5i \end{vmatrix}}{7 - 5i} = \frac{10 - 41i}{7 - 5i} = 3.71 - 3.20i$$

El circuito original queda reducido a la siguiente forma:



PROBLEMA 20

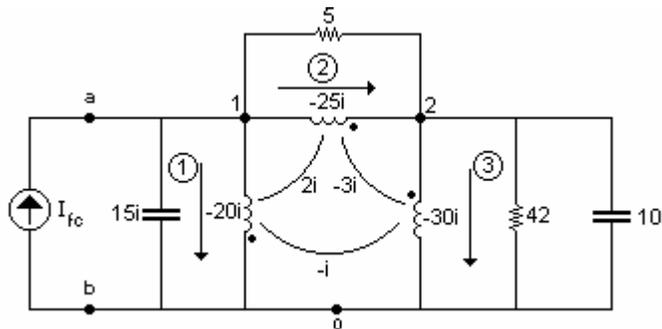
Calcule las admitancias propias y mutuas de nodos, que permitan encontrar la Y_{ab} en el circuito dado.



Solución: Las admitancias propias y mutuas son datos. Según las marcas de polaridad dadas, los sentidos que se asignan a las bobinas acopladas cumplen con lo siguiente: si $\Gamma_{kl} > 0$ se tendrá una $L_{kl} < 0$ y viceversa.

Recordar que:
$$Y_{kl} = \frac{\Gamma_{kl}}{i\omega} = -\frac{(\Gamma_{kl})i}{\omega}$$

Se puede observar que las dos conductancias laterales pueden ser reducidas a una:



$$y_{11} = 5 + 15i - 20i - 25i + 2(2i) = 5 - 26i$$

$$y_{22} = 5 + 42 + 10i - 30i - 25i - 2(-3i) = 47 - 39i$$

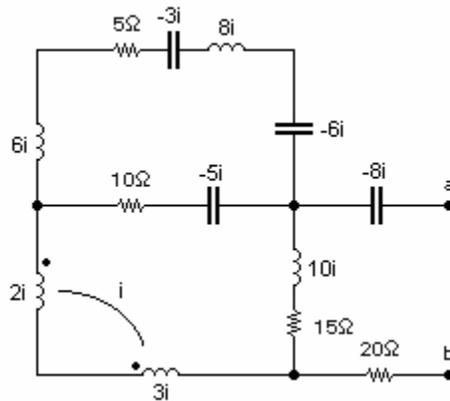
$$y_{12} = -5 - (-25i) - (2i) + (-3i) + (-i) = -5 + 19i$$

La Y_{ab} se obtendría aplicando la fórmula general:
$$Y_{ab} = \frac{\det \mathbf{y}_{n,p}}{\text{cof } y_{11}}$$

***PROBLEMAS
COMPLEMENTARIOS***

PROBLEMA 1

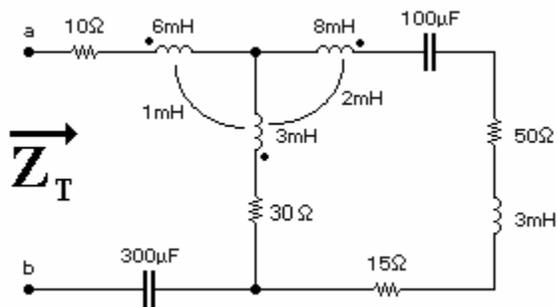
Calcule la impedancia equivalente entre las terminales *a* y *b* de la red mostrada:



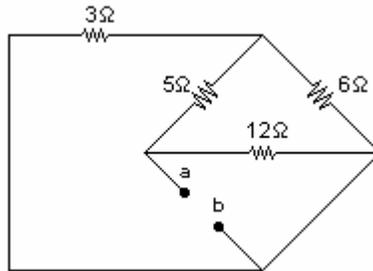
PROBLEMA 2

En la red mostrada calcule:

- La impedancia total Z_T a la frecuencia angular $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.
- El valor del inductor o capacitor equivalente.



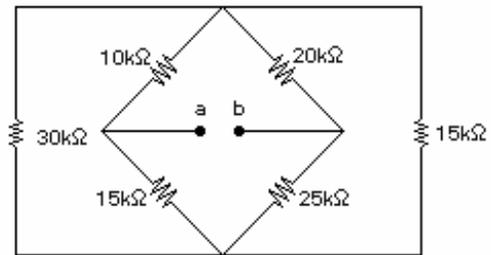
PROBLEMA 3



En el siguiente circuito calcule R_{ab} .

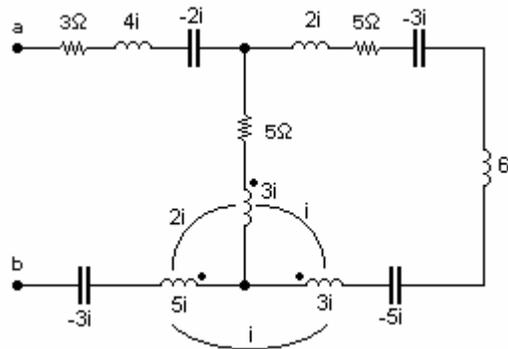
PROBLEMA 4

En el siguiente circuito calcule R_{ab} .



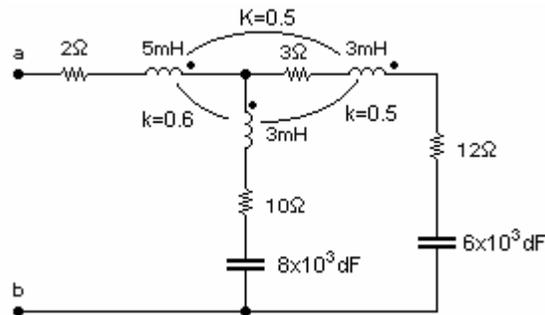
PROBLEMA 5

Calcule la impedancia equivalente entre las terminales a y b .



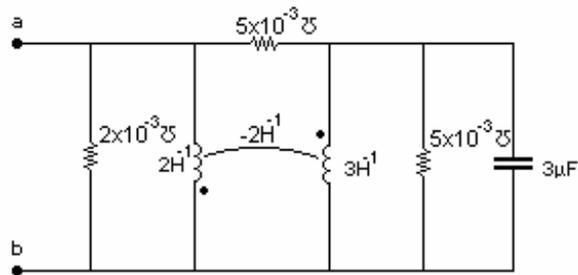
PROBLEMA 6

Encuentre la impedancia equivalente entre las terminales *a* y *b* en la red mostrada a la frecuencia $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



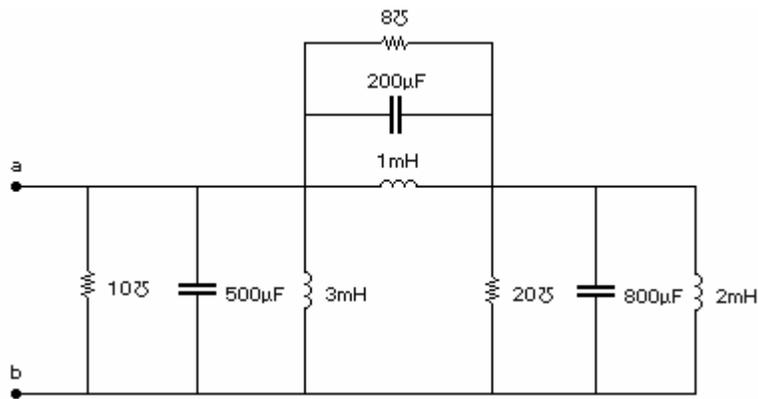
PROBLEMA 7

Encuentre las admitancias propias y mutuas de nodos de la red mostrada que permitan calcular la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b* a la frecuencia $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



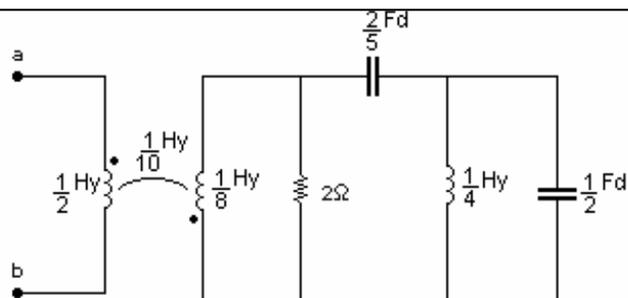
PROBLEMA 8

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b* en el circuito mostrado a la frecuencia $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



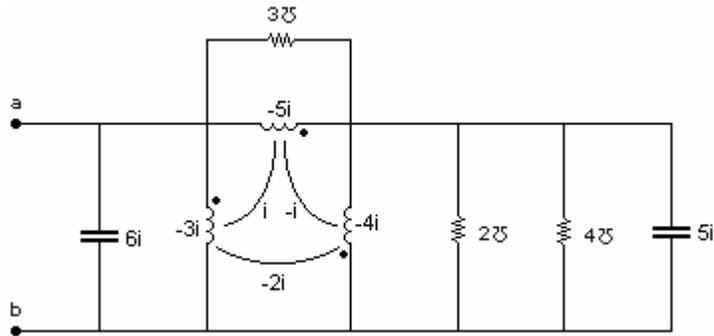
PROBLEMA 9

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales *a* y *b* a la frecuencia $\omega=2 \text{ rad/seg}$.



PROBLEMA 10

Calcule las admitancias propias y mutuas de nodos que permitan encontrar la Y_{eq} en el circuito mostrado.

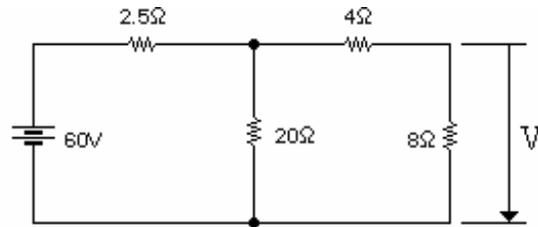


CAPÍTULO II

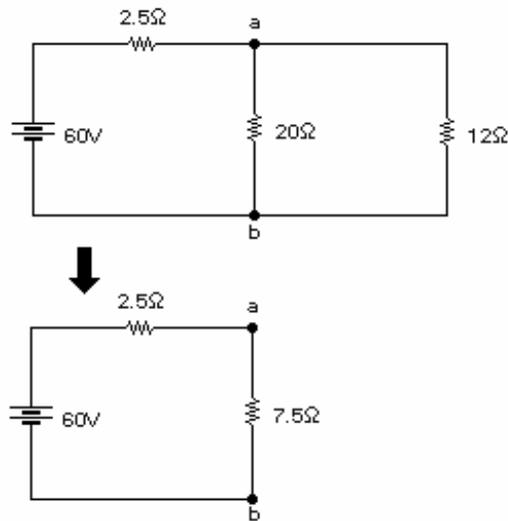
TEOREMAS DE REDES

PROBLEMA 1

Usando dos veces divisor de voltaje calcule V .



Solución:

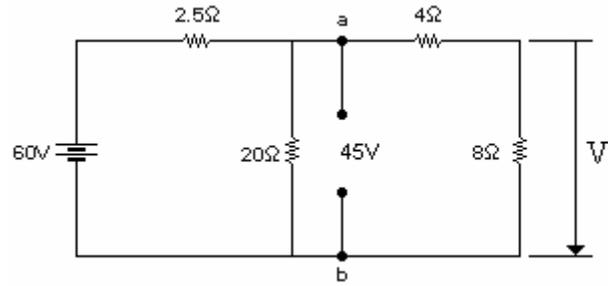


Para calcular el voltaje en la resistencia de 7.5Ω aplicaremos la siguiente fórmula:

$$V_R = \frac{(V_{fv})(R)}{R_T}$$

$$V_{ab} = \frac{(60)(7.5)}{10} = 45 \text{ Volts}$$

La siguiente figura muestra el circuito original con la resistencia de 20Ω a la izquierda de a y b , teniendo entre estos puntos la tensión de $45V$ (fuente aparente).

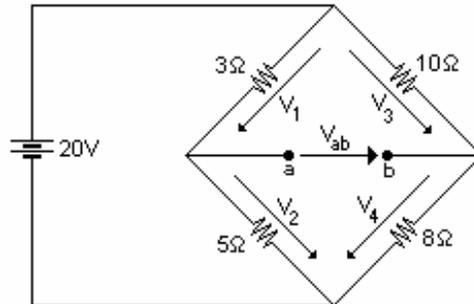


Al aplicar divisor de voltaje en la sección de la derecha se tendrá:

$$V = \frac{8(45)}{8 + 4} = 30 \text{ volts}$$

PROBLEMA 2

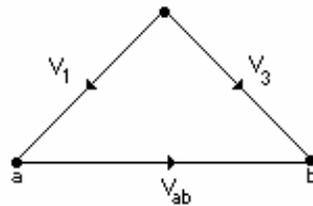
En el siguiente circuito calcule V_{ab} empleando divisor de voltaje.



Solución: Podemos establecer por L. K. V. (ley de Kirchoff para voltajes):

$$V_1 + V_{ab} - V_3 = 0 \quad \therefore \quad V_{ab} = V_3 - V_1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

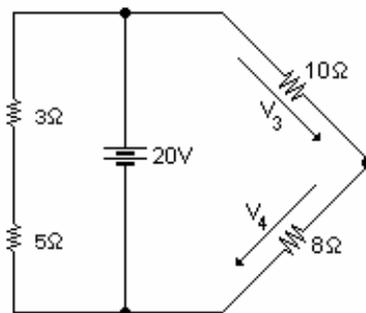
o bien usando el siguiente diagrama:



$$V_1 + V_{ab} = V_3$$

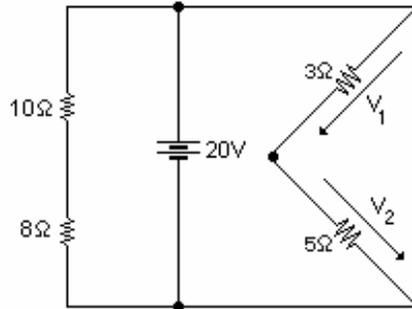
$$\therefore \quad V_{ab} = V_3 - V_1$$

Para calcular V_3 pasemos primeramente la rama que contiene a las resistencias de 3Ω y 5Ω a la izquierda de la fuente de alimentación, lo anterior con objeto de facilitar la visualización del divisor de voltaje.



$$V_3 = \frac{10(20)}{18} = 11.11$$

Para calcular V_1 pasemos ahora la rama que contiene a las resistencias de 10Ω y de 8Ω a la izquierda de la fuente:



$$V_1 = \frac{3(20)}{8} = 7.5 \text{ volts}$$

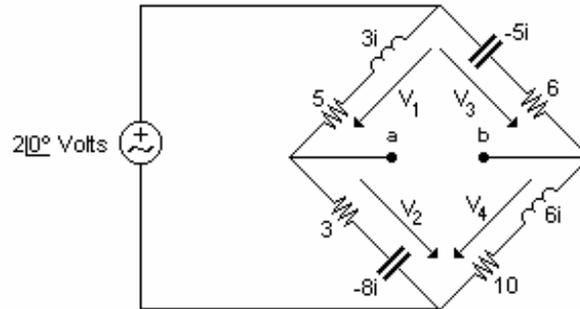
Sustituyendo en (1):

$$V_{ab} = 11.11 - 7.5 = 3.61 \text{ volts}$$

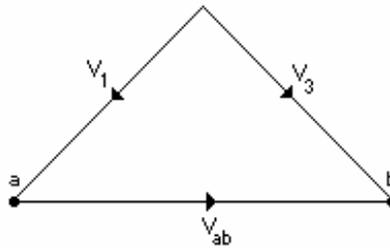
Se sugiere al estudiante comprobar este resultado empleando la trayectoria que involucre a V_2 y V_4 .

PROBLEMA 3

En el siguiente circuito encuentre V_{ab} empleando divisor de voltaje.



Solución: Representando las caídas de voltaje V_1 , V_3 y V_{ab} mediante el siguiente diagrama, se tendrá:



$$V_1 + V_{ab} = V_3 \quad \therefore \quad V_{ab} = V_3 - V_1$$

$$V_1 = \frac{(5 + 3i)2}{5 + 3i + 3 - 8i} = \frac{10 + 6i}{8 - 5i} = 0.561 + 1.101i \quad \text{volts}$$

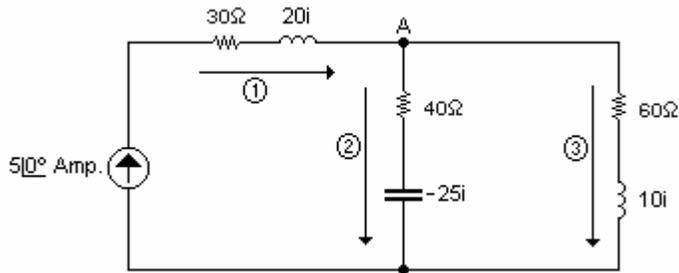
$$V_3 = \frac{(6 - 5i)2}{6 - 5i + 10 + 6i} = \frac{12 - 10i}{16 + i} = 0.708 - 0.669i \quad \text{volts}$$

Sustituyendo en V_{ab} :

$$V_{ab} = 0.708 - 0.669i - 0.561 - 1.101i = 0.147 - 1.77i = 1.77 \angle -85.2^\circ \quad \text{volts}$$

PROBLEMA 4

Empleando divisor de corriente calcule las corrientes en las ramas 2 y 3. Verifique la ley de Kirchhoff para corrientes en el nodo A.



Solución: La corriente de $5\angle 0^\circ$ Amp. proveniente de la fuente, se bifurca por las ramas 2 y 3.

Así:

$$I_2 = \frac{Z_3 I_{fc}}{Z_2 + Z_3} = \frac{(60 + 10i)5}{40 - 25i + 60 + 10i} = \frac{300 + 50i}{100 - 15i} = 2.86 + 0.929i \text{ amp.}$$

$$I_3 = \frac{Z_2 I_{fc}}{Z_2 + Z_3} = \frac{(40 - 25i)5}{40 - 25i + 60 + 10i} = 2.13 - 0.929i \text{ amp.}$$

Aplicando la ley de Kirchhoff al nodo A:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\therefore I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = 2.86 + 0.929i + 2.13 - 0.929i = 5 \text{ amp.}$$

PROBLEMA 5

Usando reducción serie-paralelo y divisor de corriente encuentre I_X .

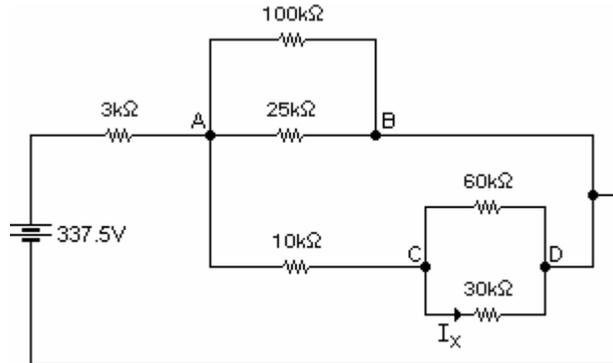


Figura 1

Solución: Reduciendo resistencias en paralelo entre los puntos A, B y C, D:

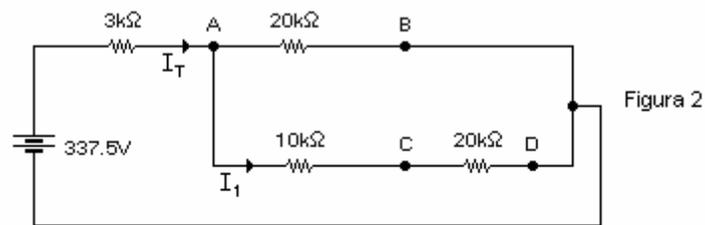


Figura 2

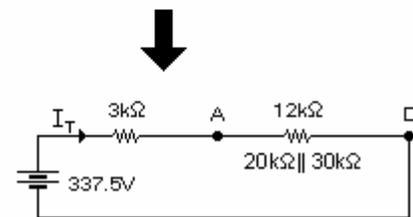


Figura 3

En el circuito de la figura 3 podemos calcular la corriente total I_T .

$$I_T = \frac{337.5}{15k} = 22.5 \text{ mA}$$

Regresando al circuito de la figura 2, tenemos que la corriente I_T se distribuye por la resistencia de $20k\Omega$ y por la rama que nos interesa ($10k\Omega$ en serie con $20k\Omega$).

En la misma figura 2, aplicando divisor de corriente para calcular I_1 :

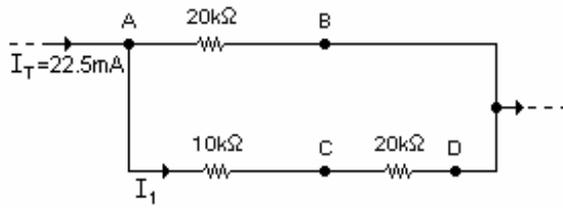
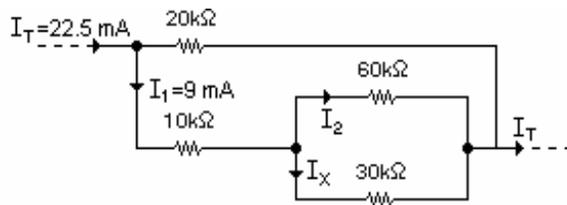


Figura 4

$$I_1 = \frac{(20k)(22.5 \times 10^{-3})}{10k + 20k + 20k} = 9 \text{ mA}$$

En la figura 4 observamos que la I_1 se distribuye como se muestra:

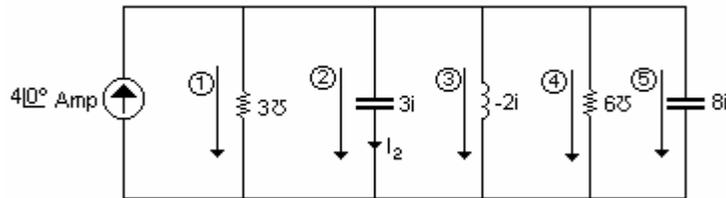


Aplicando nuevamente divisor de corriente se obtiene I_x .

$$I_x = \frac{(60k)(9 \times 10^{-3})}{90k} = 6 \text{ mA}$$

PROBLEMA 6

Dadas las admitancias de los elementos del circuito mostrado calcule I_2 .



Solución: Por divisor de corriente para impedancias sabemos que:

$$I_k = \frac{Z_T}{Z_k} I_{fc}$$

Como nos dan admitancias, podemos sustituir en la fórmula anterior a Z por $\frac{1}{Y}$ con sus respectivos índices:

Sustituyendo $Z = \frac{1}{Y}$

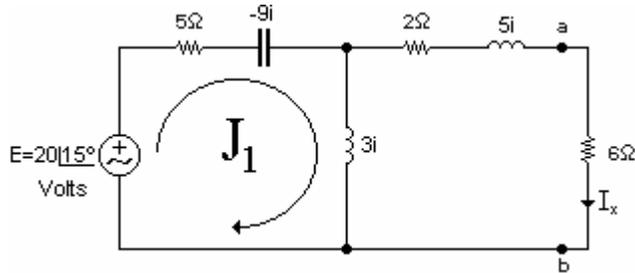
$$I_k = \frac{\frac{1}{Y_T}}{\frac{1}{Y_k}} I_{fc} = \frac{Y_k}{Y_T} I_{fc}$$

donde $Y_k = 3i$ y $Y_T = 3 + 3i - 2i + 6 + 8i$ (por estar en paralelo)
 $= 9 - 9i$

$$I_2 = \left(\frac{3i}{9 - 9i} \right) 4 \angle 0^\circ = \frac{12 \angle 90^\circ}{12.72 \angle -45^\circ} = 0.94 \angle 135^\circ \text{ amp.}$$

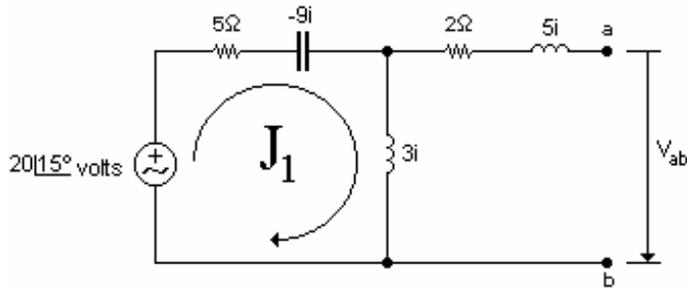
PROBLEMA 7

Aplicando el teorema de Thévenin encuentre la corriente I_x .



Solución:

1. Se separa la parte pasiva (resistor de 6Ω) y se calcula V_{ab} .



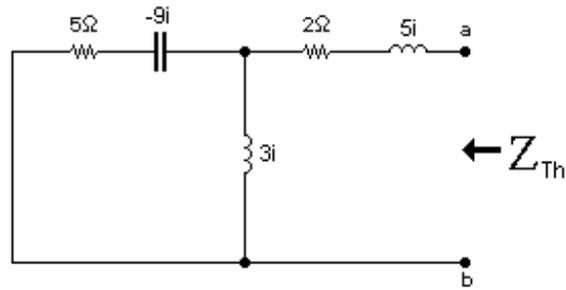
Recordar que por ley de ohm ($V=ZI$) el voltaje en la resistencia de 2Ω y en la bobina de $5i$ es cero debido a que por ellas no circula corriente.

$$J_1 = \frac{V}{Z_T} = \frac{20\angle 15^\circ}{5 - 6i} = \frac{20\angle 15^\circ}{7.81\angle -50.19^\circ} = 2.56\angle 65.19^\circ \text{ amp.}$$

$$V_{ab} = 3i(2.56\angle 65.19^\circ) = 7.68\angle 155.19^\circ \text{ volts que es el voltaje de Thévenin.}$$

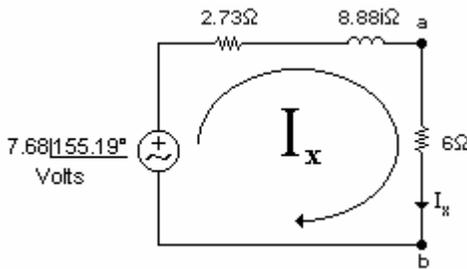
2. Para calcular la impedancia de Thévenin se pacifica la red.

Pacificar una red significa anular sus fuentes de alimentación. Si es una fuente de voltaje se sustituye por un corto circuito y si es una fuente de corriente por un circuito abierto. Así, el circuito pacificado es:



$$Z_{eq} = Z_{Th} = \frac{(5 - 9i)(3i)}{5 - 6i} + 2 + 5i = 2.73 + 8.88i \Omega$$

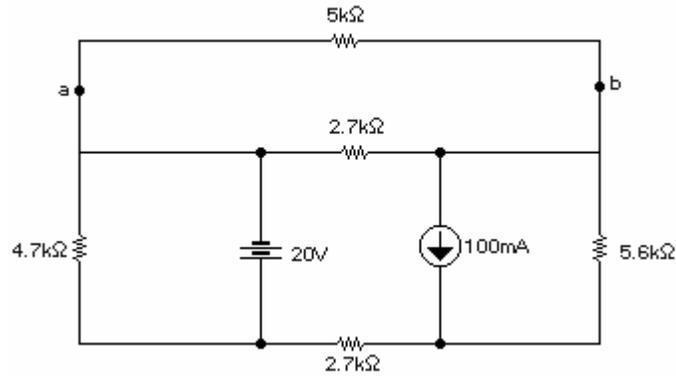
3. Se dibuja el circuito equivalente de Thévenin y se conecta el resistor de 6Ω.



$$I_x = \frac{7.68 \angle 155.19^\circ}{8.73 + 8.88i} = 0.61 \angle 109.7^\circ \text{ amp.}$$

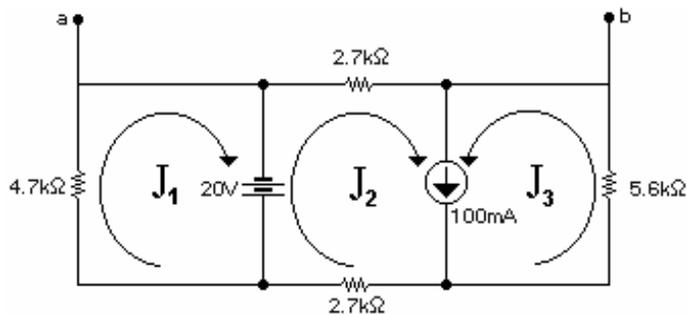
PROBLEMA 8

Aplicando el teorema de Thévenin, calcule la corriente en el resistor de 5kΩ.



Solución: Separando el resistor de 5kΩ y aplicando el método de mallas para calcular el voltaje de Thévenin entre las terminales *a* y *b*, tendremos que:

$$V_{TH} = (2.7K)(J_2)$$



$$4700 J_1 + 0 J_2 + 0 J_3 = 20 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$0 J_1 + 5400 J_2 + 0 J_3 = -20 + D \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$0 J_1 + 0 J_2 + 5600 J_3 = D \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$J_2 + J_3 = 100 \times 10^{-3} \text{ Amp} \quad \dots\dots\dots (4)$$

De la ecuación (4) tenemos:

$$J_3 = 100 \times 10^{-3} - J_2$$

De la ecuación (2) tenemos:

$$5400J_2 = -20 + D \Rightarrow D = 5400 J_2 + 20 \dots\dots\dots (A)$$

De la ecuación (3) tenemos:

$$5600[100 \times 10^{-3} - J_2] = D$$

$$560 - 5600 J_2 = D \dots\dots\dots (B)$$

Igualando las ecuaciones (A) y (B) tenemos:

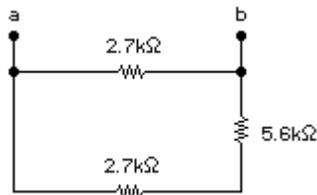
$$5400 J_2 + 20 = 560 - 5600 J_2$$

$$11000 J_2 = 560 - 20$$

$$\therefore J_2 = \frac{540}{11000} = 0.049 \text{ amp.}$$

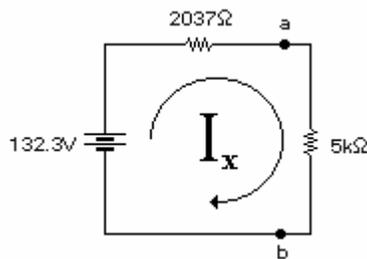
$$V_{Th} = J_2(2700) = (0.049)(2700) = 132.3 \text{ volts}$$

Pacificamos la red, a fin de calcular R_{Th} .



$$R_{Th} = \frac{8300 \times 2700}{8300 + 2700} = 2037 \Omega$$

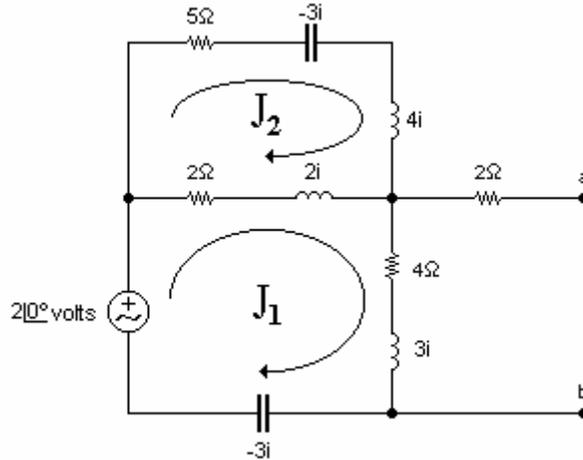
Al circuito equivalente de Thévenin se le conecta el resistor de 5kΩ:



$$I_x = \frac{132.3}{7037} = 18.8 \text{ mA}$$

PROBLEMA 9

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin entre las terminales a y b .



Solución:

$$V_{Th} = V_{ab} = J_1(4 + 3i) = J_1(5\angle 36.86^\circ)$$

$$Z_{T1} = 6 + 2i$$

$$Z_{T2} = 7 + 3i$$

$$Z_{T2} = -2 - 2i$$

Estableciendo las ecuaciones de mallas:

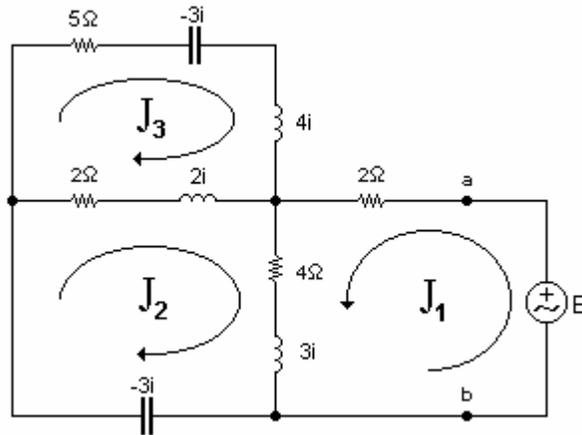
$$(6 + 2i) J_1 + (-2 - 2i) J_2 = 2$$

$$(-2 - 2i) J_1 + (7 + 3i) J_2 = 0$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 - 2i \\ 0 & 7 + 3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 + 2i & -2 - 2i \\ -2 - 2i & 7 + 3i \end{vmatrix}} = \frac{14 + 6i}{36 + 24i} = 0.352\angle -10.51^\circ \text{ amp.}$$

$$V_{Th} = (0.352\angle -10.51^\circ)(5\angle 36.86^\circ) = 1.76\angle 26.35^\circ \text{ volts}$$

La impedancia de Thévenin se calcula del circuito siguiente:



$$Z_{T1} = 6 + 3i$$

$$Z_{T2} = 6 + 2i$$

$$Z_{T3} = 7 + 3i$$

$$Z_{T2} = 4 + 3i$$

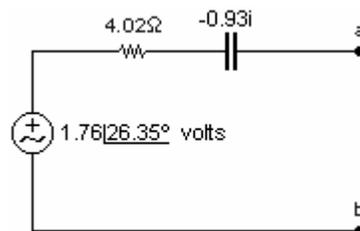
$$Z_{T3} = 0$$

$$Z_{T3} = -2 - 2i$$

$$Z_{eq} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{T1}} = \frac{\begin{vmatrix} 6+3i & 4+3i & 0 \\ 4+3i & 6+2i & -2-2i \\ 0 & -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6+2i & -2-2i \\ -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}} = \frac{167+63i}{36+24i} = \frac{178.5 \angle 20.6^\circ}{43.2 \angle 33.7^\circ} = 4.13 \angle -13.1^\circ$$

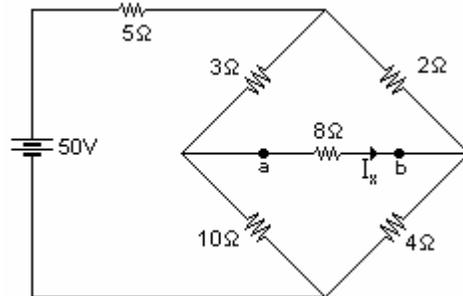
$$Z_{eq} = 4.02 - 0.93i \Omega$$

El circuito equivalente de Thévenin es:

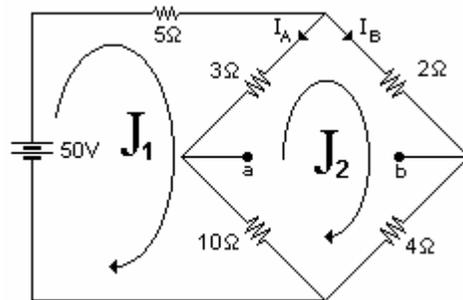


PROBLEMA 10

Utilizando el teorema de Thévenin encuentre la corriente que circula por el resistor de 8Ω .



Solución: Habiendo separado el resistor de 8Ω , se tendrá la malla 2. Habremos de calcular $V_{ab} = V_{Th}$.



Aplicando el método de mallas para encontrar J_1 y J_2 :

$$Z_{11} = 18$$

$$Z_{22} = 19$$

$$Z_{12} = -13$$

$$18 J_1 - 13 J_2 = 50$$

$$-13 J_1 + 19 J_2 = 0$$

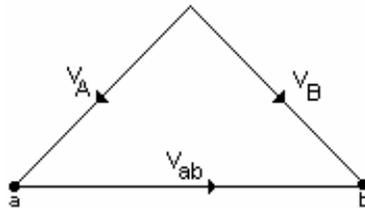
$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -13 \\ 0 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18 & -13 \\ -13 & 19 \end{vmatrix}} = \frac{950}{173} = 5.491 \text{ amp.}$$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 50 \\ -13 & 0 \end{vmatrix}}{173} = \frac{650}{173} = 3.757 \text{ amp.}$$

$$I_A = J_1 - J_2 = 5.491 - 3.757 = 1.734 \text{ amp.}$$

$$I_B = J_2 = 3.757 \text{ amp.}$$

Representando las caídas de voltaje mediante el siguiente diagrama:



$$V_A + V_{ab} = V_B$$

$$\therefore V_{ab} = V_B - V_A$$

$$V_A = (1.734)(3) = 5.202 \text{ volts}$$

$$V_B = (3.757)(2) = 7.514 \text{ volts}$$

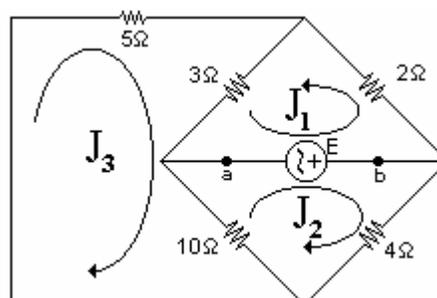
Por lo que el voltaje de Thévenin resulta:

$$V_{ab} = V_{Th} = 7.514 - 5.202 = 2.31 \text{ volts}$$

Se sugiere al estudiante calcular este voltaje empleando dos veces el divisor de voltaje.

Para calcular la resistencia de Thévenin pueden verse los problemas 6, 8 o 9 del Capítulo I (Estructuras pasivas de dos terminales).

Al pacificar la red:



$$E = RI \therefore R = E/I$$

$$I = J_1 + J_2 \text{ (corrientes diferentes de las anteriores)}$$

Empleando el método de mallas:

$$Z_{T1} = 5$$

$$Z_{T2} = 14$$

$$Z_{T3} = 18$$

$$Z_{T2} = 0$$

$$Z_{T3} = 3$$

$$Z_{T3} = -10$$

$$5J_1 + 0J_2 + 3J_3 = E$$

$$0J_1 + 14J_2 - 10J_3 = E$$

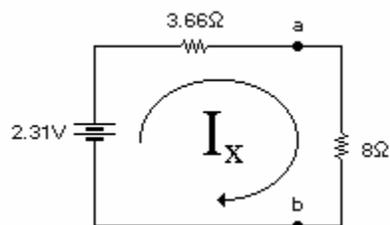
$$3J_1 - 10J_2 + 18J_3 = 0$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & 0 & 3 \\ E & 14 & -10 \\ 0 & -10 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 14 & -10 \\ 3 & -10 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{122E}{634}$$

$$J_2 = \frac{51E}{634}$$

$$R = \frac{E}{I} = \frac{E}{\frac{122E}{634} + \frac{51E}{634}} = \frac{634}{173} = 3.66\Omega$$

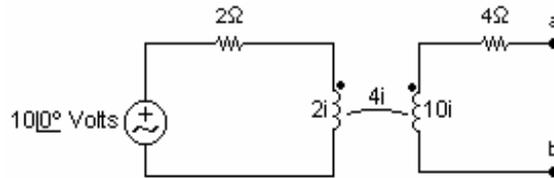
Al conectar al circuito equivalente de Thévenin el resistor de 8Ω :



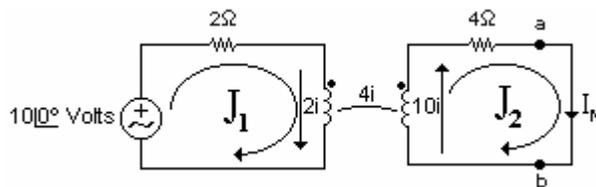
$$I_x = \frac{2.31}{11.66} = 198 \text{ mA}$$

PROBLEMA 11

En la red mostrada encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales *a* y *b*.



Solución: Se cortocircuitan las terminales *a* y *b* y se orientan elementos y mallas:



$$Z_{12} = -4i$$

Aplicando el método de mallas:

$$Z_{T1} J_1 + Z_{T2} J_2 = 10$$

$$Z_{21} J_1 + Z_{22} J_2 = 0$$

$$Z_{T1} = 2 + 2i$$

$$Z_{22} = 4 + 10i$$

$$Z_{T2} = -4i$$

Sustituyendo impedancias de mallas:

$$(2 + 2i) J_1 + (-4i) J_2 = 10$$

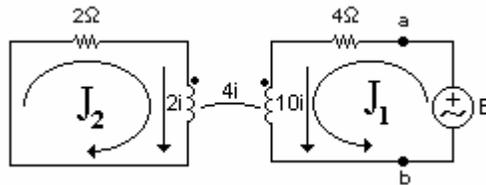
$$(-4i) J_1 + (4 + 10i) J_2 = 0$$

La corriente que circula por las terminales cortocircuitadas es la corriente de Norton, en este caso J_2 .

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + 2i & 10 \\ -4i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + 2i & -4i \\ -4i & 4 + 10i \end{vmatrix}} = \frac{40i}{4 + 28i} = 1.4144 \angle 8.14^\circ \text{ amp.}$$

$$I_N = 1.4144 \angle 8.14^\circ \text{ amp.}$$

Calculemos ahora la impedancia vista entre las terminales a y b , para esto necesitamos pacificar la estructura activa original y conectar la fuente E :



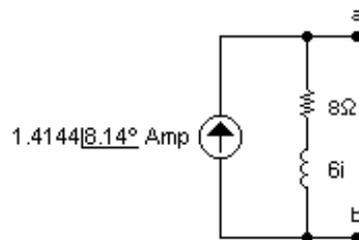
$$Z_{T1} = 4 + 10i$$

$$Z_{T2} = 2 + 2i$$

$$Z_{T3} = 4i$$

$$Z_{ab} = \frac{\det \mathbf{Z}_{m,r}}{\text{cof } Z_{T1}} = \frac{\begin{vmatrix} 4 + 10i & 4i \\ 4i & 2 + 2i \end{vmatrix}}{2 + 2i} = \frac{4 + 28i}{2 + 2i} = 8 + 6i\Omega$$

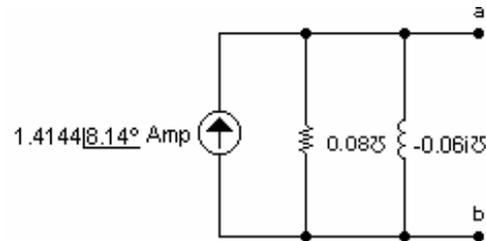
Representando esta impedancia con elementos de circuito tendremos el circuito equivalente de Norton como sigue:



O bien, en función de la admitancia:

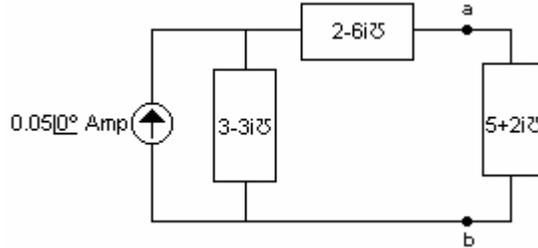
$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{8 + 6i} = 0.08 - 0.06i$$

Obteniéndose:



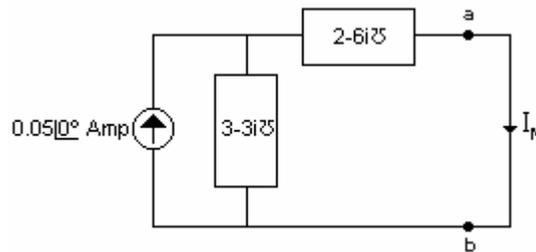
PROBLEMA 12

Encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales *a* y *b*.



Solución:

1. Separamos la admitancia entre las terminales *a* y *b*, y cortocircuitamos estas terminales.

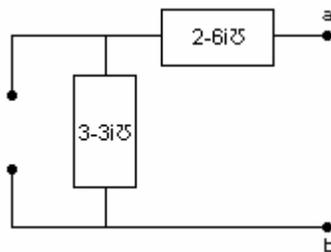


2. Aplicamos divisor de corriente con admitancias para calcular la I_N :

$$I_k = \frac{Y_k}{Y_T} I_{fc}$$

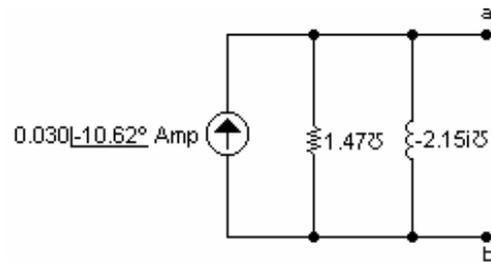
$$I_N = \frac{(2 - 6i)}{2 - 6i + 3 - 3i} (0.05) = 0.030 \angle -10.62^\circ \text{ amp.}$$

3. Calculamos la admitancia de Norton. Pacificamos el circuito abriendo la fuente de corriente:



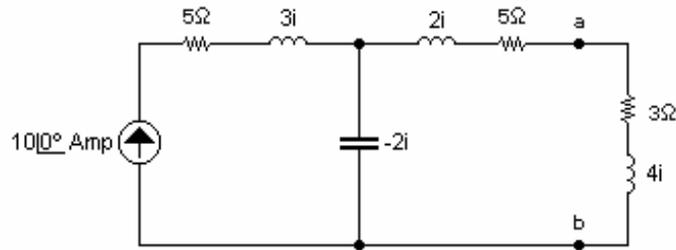
$$Y_N = \frac{(2 - 6i)(3 - 3i)}{2 - 6i + 3 - 3i} = 1.47 - 2.15i$$

El circuito equivalente de Norton entre a y b es:



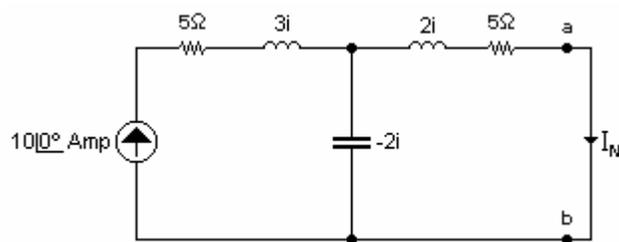
PROBLEMA 13

Aplicando el teorema de Norton calcule la corriente en la carga de $3+4i$.



Solución:

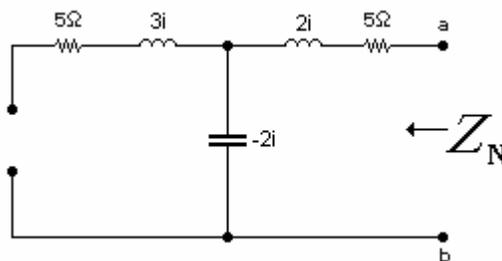
1. Separamos la carga y cortocircuitamos las terminales a y b :



2. Aplicamos divisor de corriente:

$$I_N = \frac{(-2i)}{5} (10) = 4 \angle -90^\circ \text{ amp.}$$

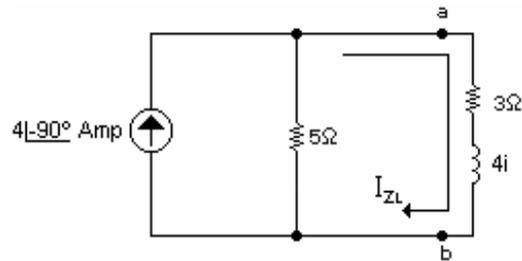
3. La admitancia de Norton se calcula de:



Puede observarse que por efecto del circuito abierto la impedancia de $5+3i$ queda anulada.

$$Y_N = \frac{1}{5} \text{ ó } Z_N = 5\Omega$$

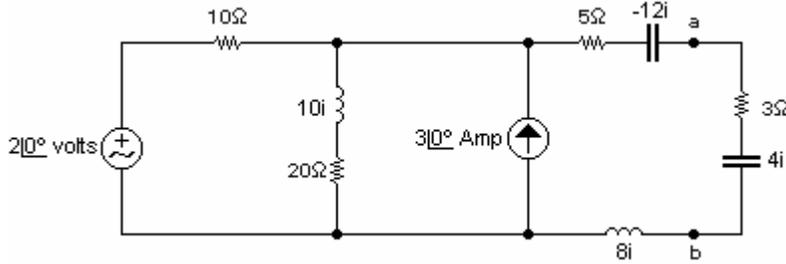
4. Conectamos la carga al circuito equivalente de Norton y aplicamos divisor de corriente con impedancias.



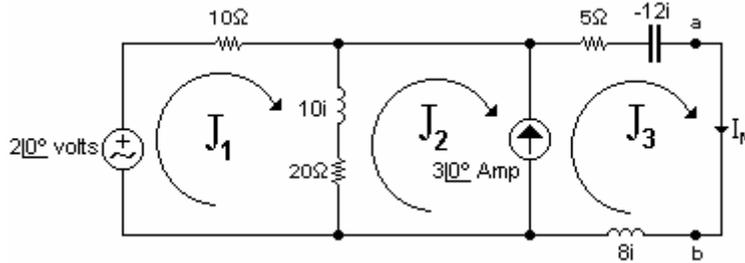
$$I_{z_L} = \frac{5(4\angle -90^\circ)}{5 + 3 + 4i} = \frac{20\angle -90^\circ}{8.94\angle 26.56^\circ} = 2.23\angle -116.56^\circ \text{ amp.}$$

PROBLEMA 14

Obtenga el circuito equivalente de Norton entre los puntos *a* y *b* de la siguiente red.



Solución: Separamos la carga de $3+4i$ y cortocircuitamos las terminales *a* y *b*.



Aplicando el método de mallas para encontrar I_N :

$$Z_{T1} = 30 + 10i$$

$$Z_{T2} = 20 + 10i$$

$$Z_{T3} = 5 - 4i$$

$$Z_{T2} = -(20 + 10i)$$

$$Z_{T3} = 0$$

$$Z_{T3} = 0$$

$$(30 + 10i) J_1 - (20 + 10i) J_2 + 0 J_3 = 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$-(20 + 10i) J_1 + (20 + 10i) J_2 + 0 J_3 = -D \dots \dots \dots (2)$$

$$0 J_1 + 0 J_2 + (5 - 4i) J_3 = D \dots \dots \dots (3)$$

$$J_3 - J_2 = 3 \dots \dots \dots (4)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3):

$$-(20 + 10i) J_1 + (20 + 10i) J_2 + (5 - 4i) J_3 = 0 \dots\dots\dots (A)$$

De (4):

$$0 J_1 - (1) J_2 + (1) J_3 = 3 \dots\dots\dots (B)$$

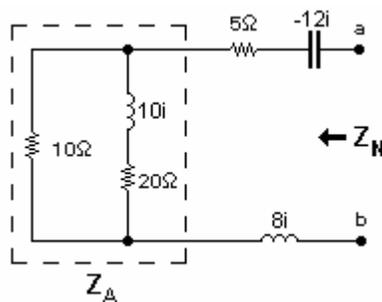
De (1):

$$(30 + 10i) J_1 - (20 + 10i) J_2 + 0 J_3 = 2 \dots\dots\dots (C)$$

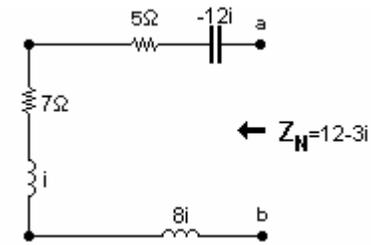
Observamos en nuestro circuito que J_3 es la corriente de Norton. Así:

$$J_3 = I_N = \frac{\begin{vmatrix} -(20 + 10i) & 20 + 10i & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 30 + 10i & -(20 + 10i) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(20 + 10i) & 20 + 10i & 5 - 4i \\ 0 & -1 & 1 \\ 30 + 10i & -(20 + 10i) & 2 \end{vmatrix}} = \frac{640 + 320i}{390 + 30i} = 1.6941 + 0.6901i = 1.82 \angle 22.16^\circ \text{ amp.}$$

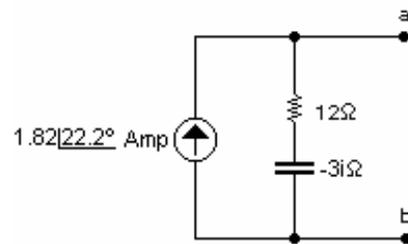
Calculando la impedancia de Norton:



$$Z_A = \frac{10(20 + 10i)}{10 + 20 + 10i} = \frac{200 + 100i}{30 + 10i} = 7 + i \ \Omega$$

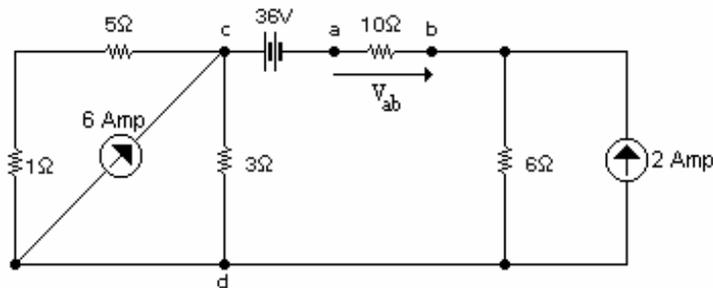


El circuito equivalente de Norton queda:

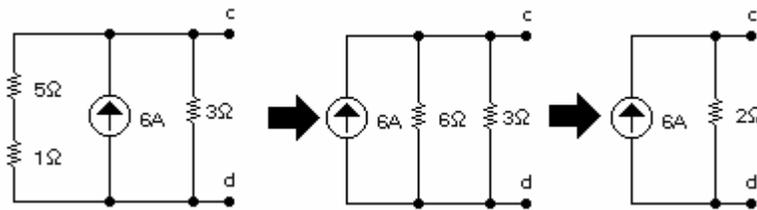


PROBLEMA 15

Empleando reducción serie-paralelo e intercambio de fuentes calcule V_{ab} en el circuito mostrado.

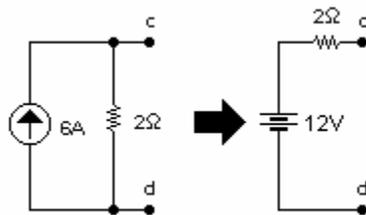


Solución: Del lado izquierdo:



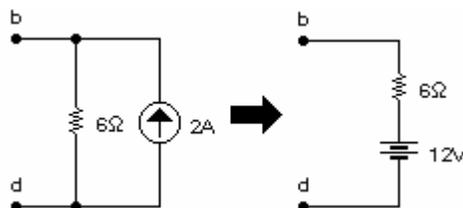
$$V = IR$$

$$V = (6)(2) = 12 \text{ volts}$$

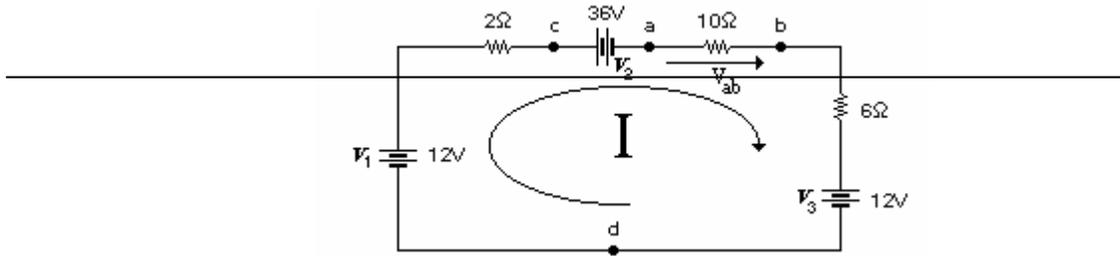


Del lado derecho en el circuito original, tendremos:

$$V = (2)(6) = 12 \text{ volts}$$



Haciendo las sustituciones correspondientes:



$$-V_1 + V_{R2} + V_2 + V_{R10} + V_{R6} + V_3 = 0$$

$$-12 + 2I + 36 + 10I + 6I + 12 = 0$$

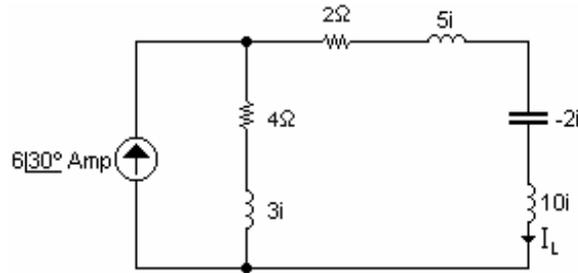
$$18I + 36 = 0$$

$$\therefore I = -2 \text{ amp.}$$

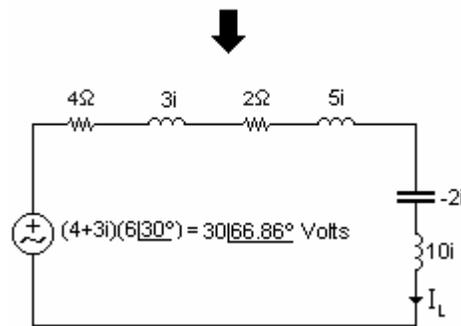
$$V_{ab} = RI = (10)(-2) = -20 \text{ volts}$$

PROBLEMA 16

Empleando el teorema del intercambio de fuentes encuentre la corriente I_L que se indica en el circuito mostrado.



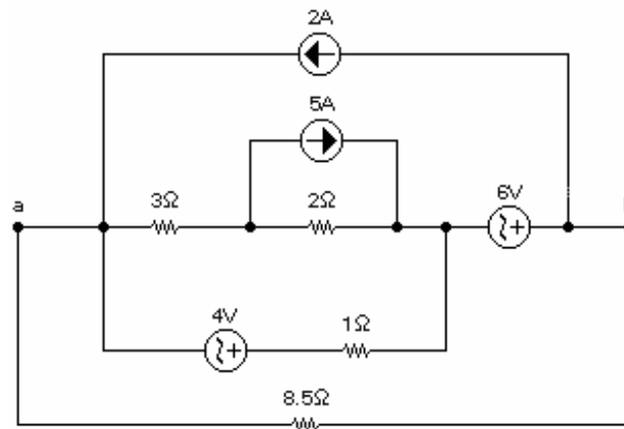
Solución:



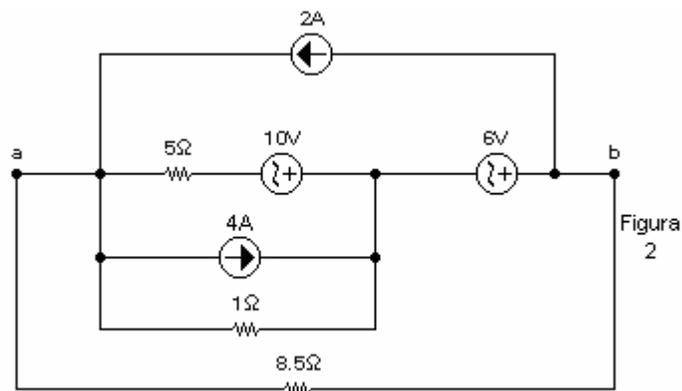
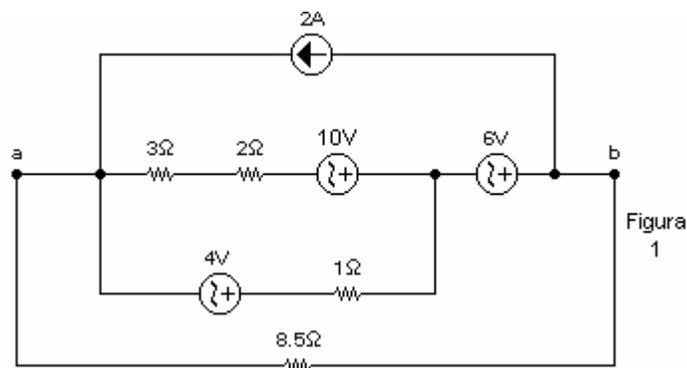
$$I_L = \frac{30\angle 66.86^\circ}{6 + 16i} = \frac{30\angle 66.86^\circ}{17.08\angle 69.44^\circ} = 1.75\angle -2.58^\circ \text{ amp.}$$

PROBLEMA 17

Por intercambio sucesivo de fuentes entre los puntos *a* y *b*, calcule la corriente que circula por la resistencia de 8.5Ω .



Solución: En las figuras siguientes se ilustra el intercambio de fuentes y resistencias entre *a* y *b*:



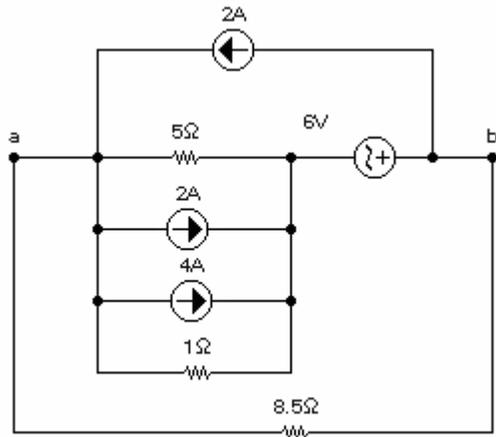


Figura 3

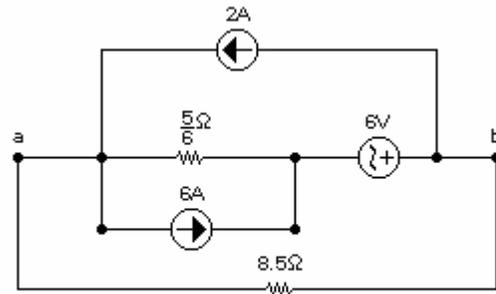


Figura 4

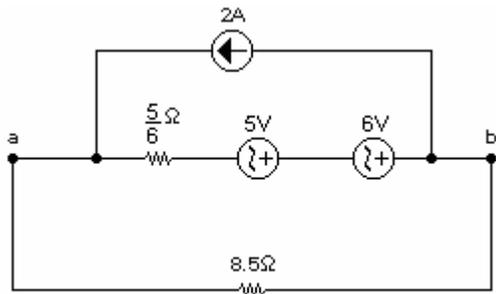


Figura 5

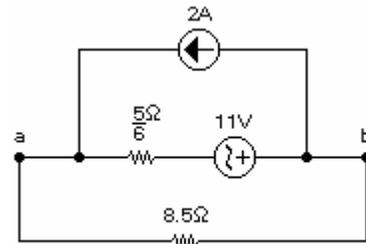


Figura 6

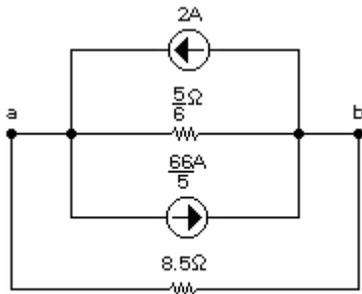


Figura 7

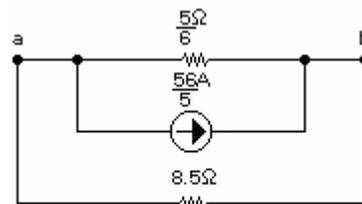


Figura 8

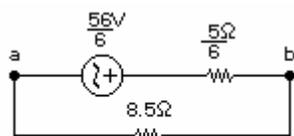
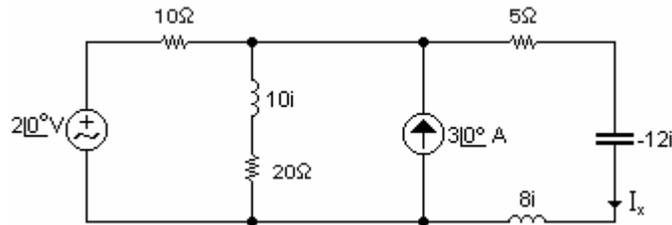


Figura 9

$$I_{ab} = \frac{\frac{56}{6}}{\frac{5}{6} + 8.5} = \frac{56}{56} = 1 \text{ amp.}$$

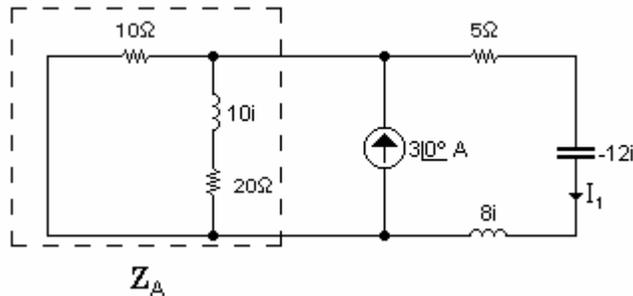
PROBLEMA 18

En el siguiente circuito encuentre la corriente I_x empleando el teorema de superposición.

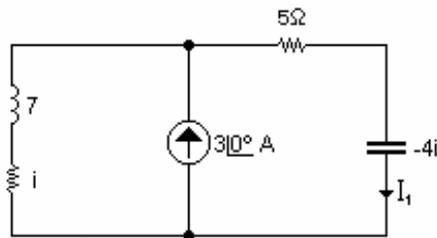


Solución:

1. Hacemos actuar la fuente de corriente y anulamos la fuente de voltaje cortocircuitándola.



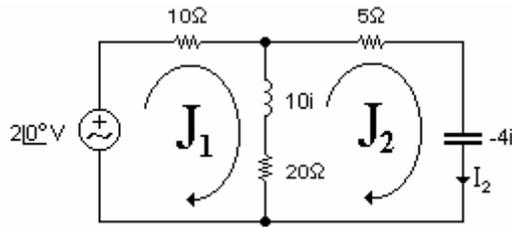
$$Z_A = \frac{10(20 + 10i)}{10 + 20 + 10i} = 7 + i \quad \Omega$$



Por divisor de corriente:

$$I_1 = \frac{(7 + i)(3\angle 0^\circ)}{12 - 3i} = \frac{21 + 3i}{12 - 3i}$$

2. Hacemos actuar ahora la fuente de voltaje y anulamos la fuente de corriente abriéndola.



Aplicando el método de mallas:

$$Z_{11} = 30 + 10i$$

$$Z_{22} = 25 + 6i$$

$$Z_{12} = -(20 + 10i)$$

$$(30 + 10i) J_1 - (20 + 10i) J_2 = 2$$

$$-(20 + 10i) J_1 + (25 + 6i) J_2 = 0$$

Se observa que la $J_2 = I_2$. Así:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 + 10i & 2 \\ -(20 + 10i) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 + 10i & -(20 + 10i) \\ -(20 + 10i) & 25 + 6i \end{vmatrix}} = \frac{4 + 2i}{39 + 3i}$$

La corriente total I_x será la suma de las respuestas parciales I_1 e I_2 :

$$I_x = I_1 + I_2$$

$$I_x = \frac{21 + 3i}{12 - 3i} + \frac{4 + 2i}{39 + 3i}$$

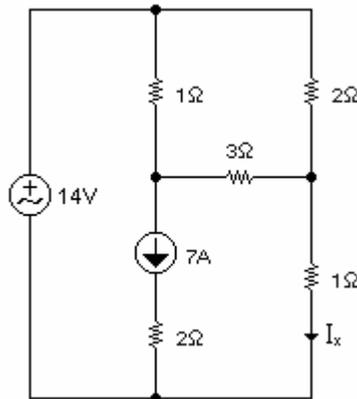
Haciendo operaciones algebraicas podemos convertir I_1 e I_2 a sus formas cartesianas y sumarlas, obteniendo un resultado aceptable; sin embargo, a fin de llegar a un resultado más exacto multiplicaremos el numerador y denominador de I_1 por el factor $(3+i)$ y así obtener el mismo denominador que I_2 :

$$I_1 = \frac{(21 + 3i)(3 + i)}{(12 - 3i)(3 + i)} = \frac{60 + 30i}{39 + 3i}$$

$$I_x = \frac{60 + 30i}{39 + 3i} + \frac{4 + 2i}{39 + 3i} = \frac{64 + 32i}{39 + 3i} = 1.6941 + 0.6901i = 1.82 \angle 22.16^\circ \text{ amp.}$$

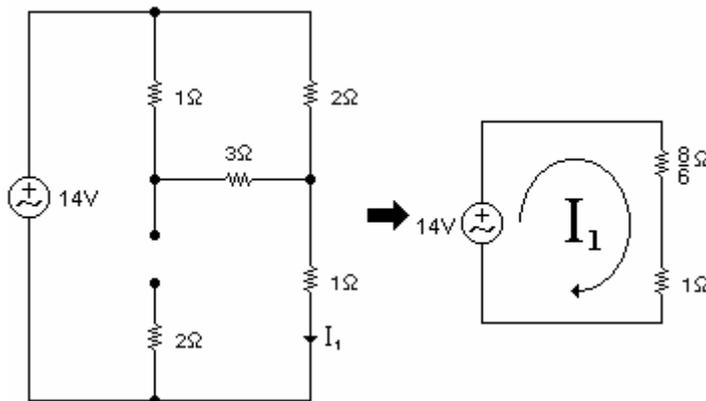
PROBLEMA 19

Empleando el teorema de superposición encuentre I_x .



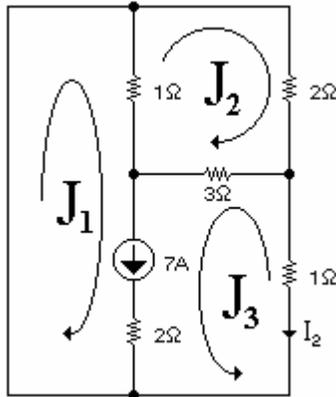
Solución:

1. Hacemos actuar la fuente de voltaje y anulamos la fuente de corriente abriéndola. El circuito queda:



$$I_1 = \frac{14}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3}} = 6 \text{ amp.}$$

2. Ahora hacemos actuar la fuente de corriente y anulamos la fuente de voltaje cortocircuitándola. El circuito queda:



Resolviendo por el método de mallas:

$$3 J_1 - J_2 + 2 J_3 = D \dots\dots\dots(1)$$

$$- J_1 + 6 J_2 + 3 J_3 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$2 J_1 + 3 J_2 + 6 J_3 = D \dots\dots\dots(3)$$

Restando la ecuación (3) de (1):

$$J_1 - 4 J_2 - 4 J_3 = 0 \dots\dots\dots(A)$$

Además :

$$J_1 + J_3 = 7 \dots\dots\dots(B)$$

y de (2):

$$- J_1 + 6 J_2 + 3 J_3 = 0 \dots\dots\dots(C)$$

Ordenando coeficientes de estas tres ecuaciones:

$$J_1 - 4 J_2 - 4 J_3 = 0$$

$$J_1 + 0 J_2 + J_3 = 7$$

$$- J_1 + 6 J_2 + 3 J_3 = 0$$

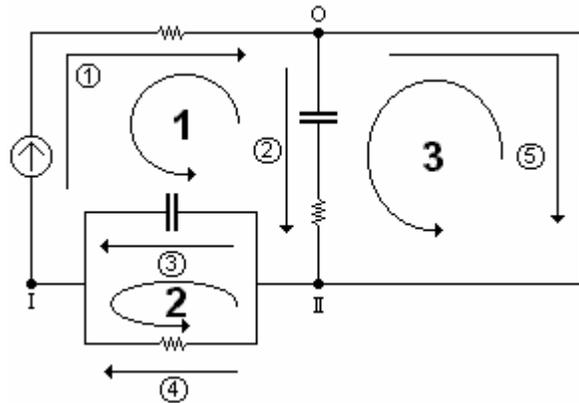
$$J_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-14} = 1 \text{ amp.}$$

Se observa en el circuito que $I_2 = -J_3$. Así, la respuesta total es $I_x = I_1 + I_2$.

$$I_x = 6 + (-J_3) = 6 + (-1) = 5 \text{ amp.}$$

PROBLEMA 20

Obtenga la red dual de la red dada empleando dualidad especial y verifique la correspondencia entre sus ecuaciones.

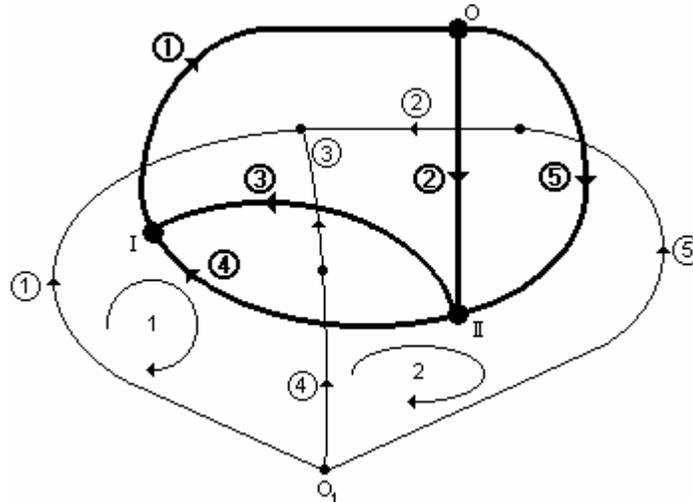


Solución:

Procedimiento

1. Se dibuja la gráfica de la red dada (líneas gruesas), orientando las mallas en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
2. Se asigna a cada malla (ventana) un punto que será un nodo de la red dual y cuyo número será el de la malla de la red dada que lo encierre.
3. Se trazan líneas de un nodo a otro que pasen por un solo elemento (líneas delgadas), con lo cual se formarán mallas de la red dual. Estas mallas se designarán con el número del nodo de la red dada que quede encerrado por la malla formada.
4. Se orientan las mallas de la red dual en el sentido de las manecillas del reloj.
5. Los elementos de la red dual se orientan de modo que coincida el número de incidencia del elemento de la red dada con respecto a nodo de la misma red dada y el número de incidencia del elemento dual con respecto a malla de la red dual.

6. Se extrae la gráfica dual y se sustituyen los elementos básicos correspondientes en cada elemento general de dicha gráfica.

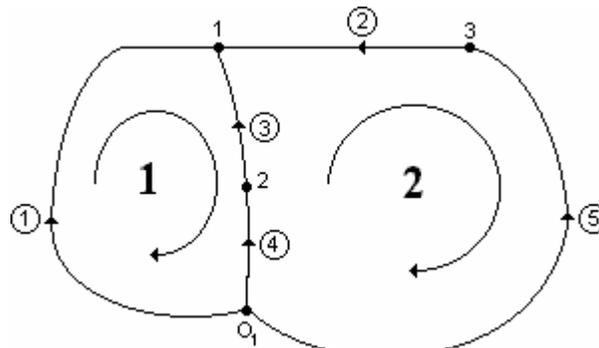


En la red original se tiene:

λ = número total de elementos de la red dada = 5.

$\nu - c$ = número de nodos independientes de la red dada = 2.

μ = número de mallas independientes de la red dada = 3.



Gráfica de la red dual.

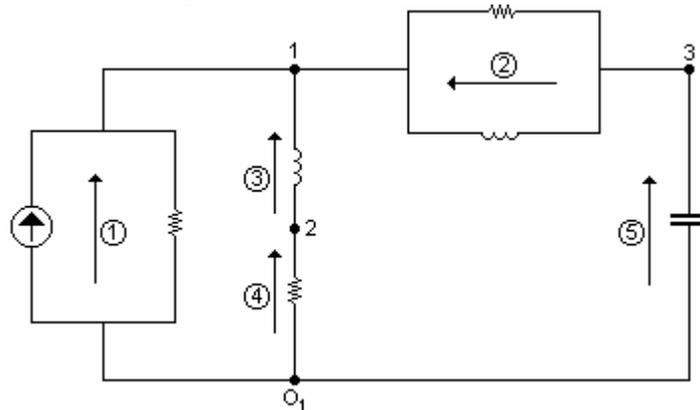
En la red dual se tiene que:

λ = 5 elementos.

$\nu - c$ = 3 nodos independientes.

μ = 2 mallas independientes.

Al aplicar la correspondencia entre elementos dada por el principio de dualidad especial se obtiene la red dual siguiente:



Correspondencia entre ecuaciones:

Red dada

Red dual

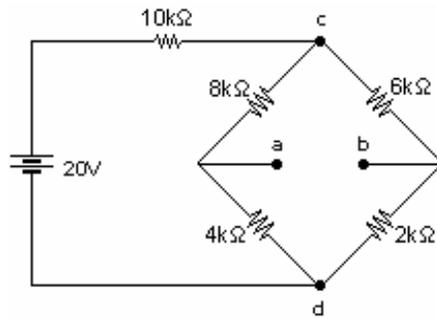
$$\begin{aligned}
 V_1 &= R_1 I_1 - E_1 & \Leftrightarrow & \quad I_1 = G_1 V_1 + I_{fc1} \\
 V_2 &= \left(R_2 + \frac{S_2}{i\omega} \right) I_2 & \Leftrightarrow & \quad I_2 = \left(G_2 + \frac{\Gamma_2}{i\omega} \right) V_2 \\
 V_3 &= \frac{S_3}{i\omega} I_3 & \Leftrightarrow & \quad I_3 = \frac{\Gamma_3}{i\omega} V_3 \\
 V_4 &= R_4 I_4 & \Leftrightarrow & \quad I_4 = G_4 V_4 \\
 V_5 &= i\omega L_5 I_5 & \Leftrightarrow & \quad I_5 = i\omega C_5 V_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{nodo I)} \quad I_1 - I_3 - I_4 &= 0 & \Leftrightarrow & \quad \text{malla 1)} \quad V_1 - V_3 - V_4 = 0 \\
 \text{nodo II)} \quad -I_2 + I_3 + I_4 - I_5 &= 0 & \Leftrightarrow & \quad \text{malla 2)} \quad -V_2 + V_3 + V_4 - V_5 = 0 \\
 \\ \\
 \text{malla 1)} \quad -V_1 - V_2 - V_3 &= 0 & \Leftrightarrow & \quad \text{nodo 1)} \quad -I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\
 \text{malla 2)} \quad V_3 - V_4 &= 0 & \Leftrightarrow & \quad \text{nodo 2)} \quad I_3 - I_4 = 0 \\
 \text{malla 3)} \quad V_2 - V_5 &= 0 & \Leftrightarrow & \quad \text{nodo 3)} \quad I_2 - I_5 = 0
 \end{aligned}$$

***PROBLEMAS
COMPLEMENTARIOS***

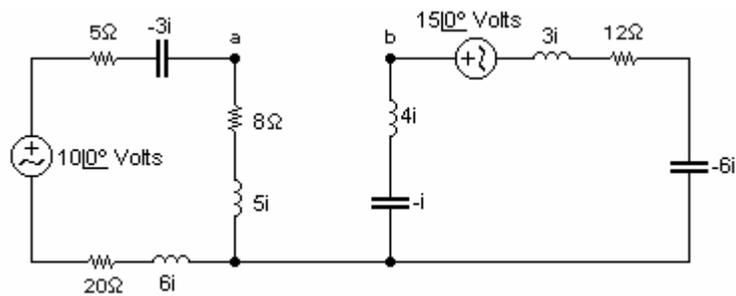
PROBLEMA 1

Usando dos veces el divisor de voltaje encuentre V_{ab} .



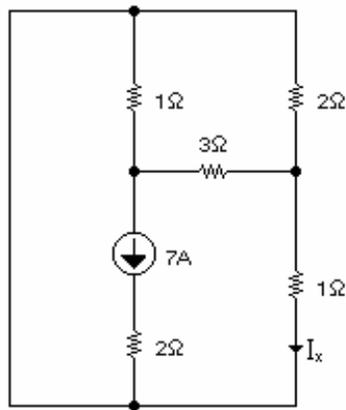
PROBLEMA 2

En la siguiente red calcule V_{ab} empleando divisor de voltaje.



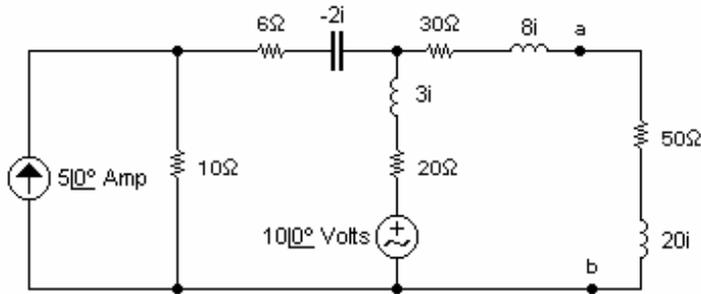
PROBLEMA 3

Usando reducción serie-paralelo y divisor de corriente encuentre la corriente I_x .



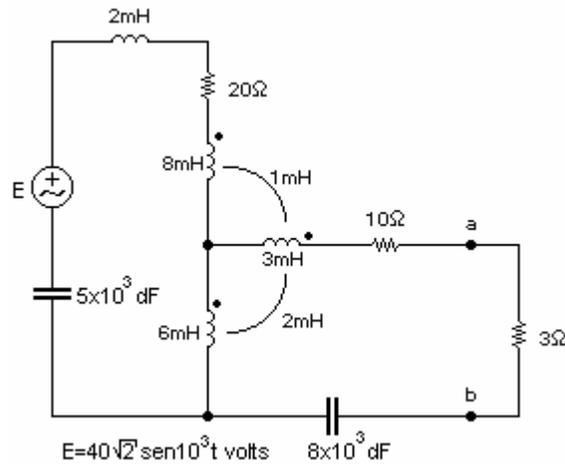
PROBLEMA 4

Aplicando intercambio de fuentes y el teorema de Thévenin encuentre la corriente en la carga de $50+20i$.



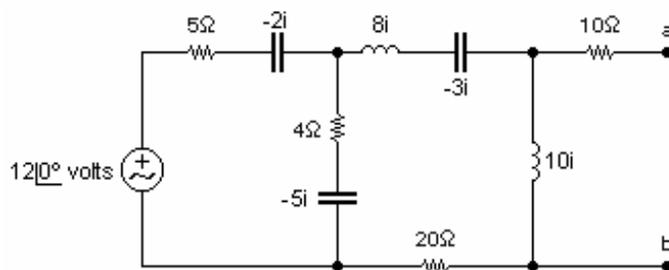
PROBLEMA 5

Empleando el teorema de Thévenin encuentre la corriente en la carga de 3Ω .



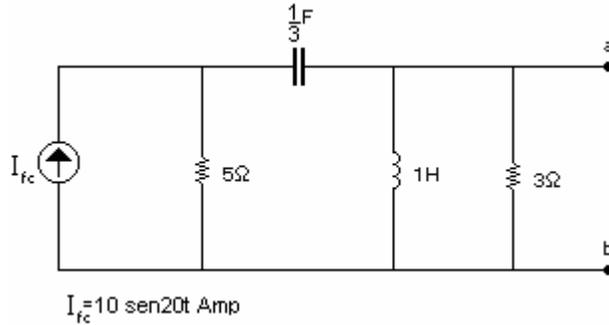
PROBLEMA 6

Encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales a y b .



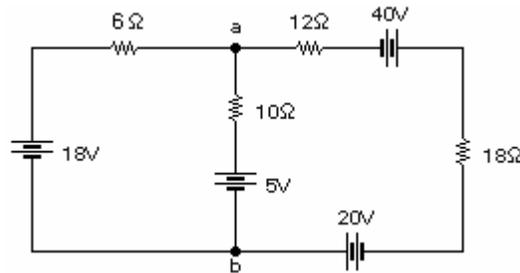
PROBLEMA 7

Encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales *a* y *b*.



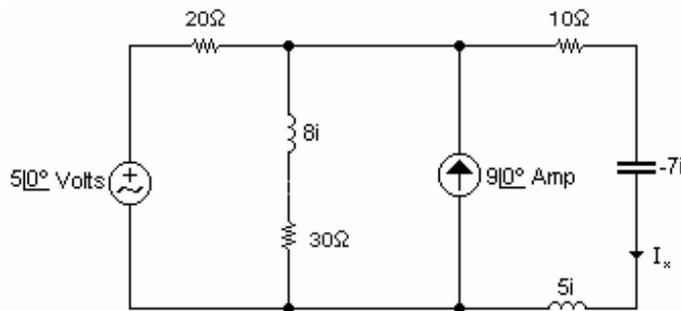
PROBLEMA 8

Empleando intercambio de fuentes encuentre la tensión entre los puntos *a* y *b* del circuito mostrado.



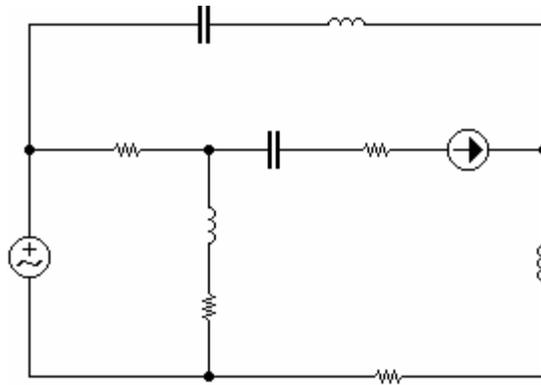
PROBLEMA 9

En el siguiente circuito encuentre I_x empleando el teorema de superposición.



PROBLEMA 10

Obtenga la red dual del circuito mostrado y verifique la correspondencia entre sus ecuaciones (emplee dualidad especial).



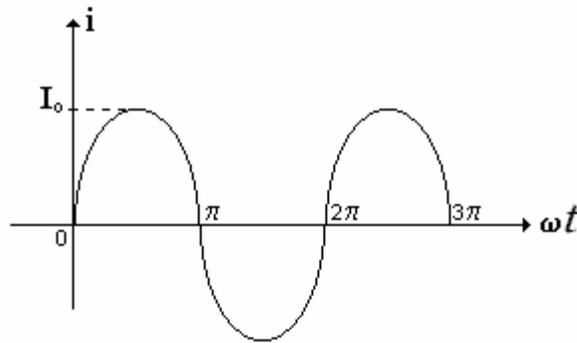
CAPÍTULO III

VALORES MEDIOS Y POTENCIA

PROBLEMA 1

Dada la función $i(t) = I_0 \text{sen}(\omega t)$ representada en la gráfica, encontrar:

- El valor medio I_m .
- El valor eficaz I_{ef} .



Solución:

- El valor medio de la función $i(t) = I_0 \text{sen}(\omega t)$ con ωt como variable independiente y periodo $T=2\pi$ es:

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{I_0}{2\pi} [-\cos(\omega t)]_0^{2\pi} = \frac{I_0}{2\pi} [-\cos(2\pi) + \cos(0)]$$

$$I_m = \frac{I_0}{2\pi} [-1 + 1] = 0$$

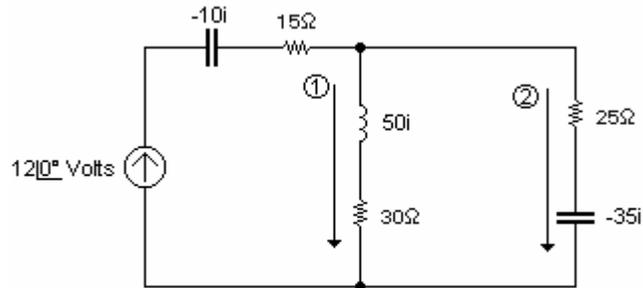
- El valor eficaz o r.m.s. de la función dada es:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [I_0 \text{sen}(\omega t)]^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\omega t) d(\omega t)}$$

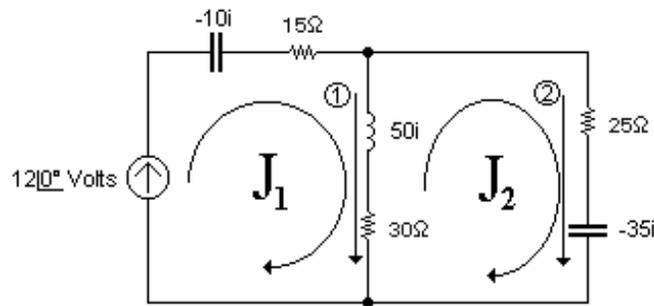
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}(2\omega t) \right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{2} - 0 \right)} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

PROBLEMA 2

Calcule la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia en la rama 2 del circuito dado. Dibuje el triángulo de potencias de esta rama.



Solución:



$$P = \bar{Z} |I|^2$$

La corriente en la rama 2 es J_2 , luego:

$$P = \bar{Z} |J_2|^2$$

Aplicando el método de mallas:

$$Z_{T1} = 45 + 40i$$

$$Z_{T2} = 55 + 15i$$

$$Z_{T2} = -30 - 50i$$

$$(45 + 40i) J_1 + (-30 - 50i) J_2 = 12$$

$$(-30 - 50i) J_1 + (55 + 15i) J_2 = 0$$

resolviendo para J_2 :

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 45 + 40i & 12 \\ -(30 + 50i) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 45 + 40i & -(30 + 50i) \\ -(30 + 50i) & 55 + 15i \end{vmatrix}} = \frac{12(30 + 50i)}{3475 - 125i} = \frac{699.71 \angle 59^\circ}{3447.24 \angle -2.06^\circ} = 0.201 \angle 61.1^\circ \text{ amp.}$$

al sustituir valores en:

$$P = \bar{Z} |I|^2 = (25 + 35i)(0.201)^2 = 1.01 + 1.4i = 1.72 \angle 54.19^\circ \text{ VA}$$

De la expresión:

$$P = P_a + iP_r \text{ obtenemos:}$$

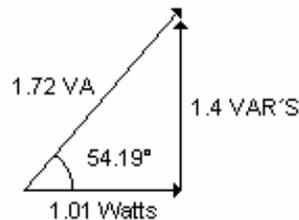
$$P_{activa} = 1.01 \text{ Watts}$$

$$P_{reactiva} = 1.4 \text{ VAR'S}$$

$$P_{aparente} = 1.72 \text{ VA}$$

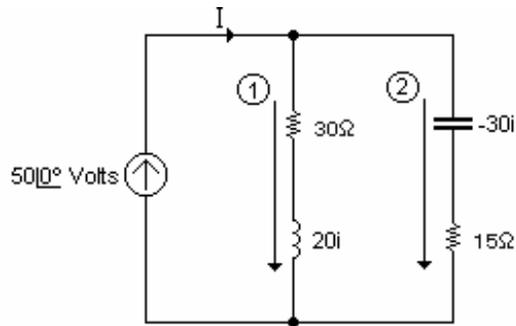
$$f.p. = \cos(54.19^\circ) = 0.58_+ \text{ (adelantado)}$$

Triángulo de potencias en la rama 2:



PROBLEMA 3

En la red dada encuentre la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia de la carga total. Posteriormente calcule las mismas potencias P_1 y P_2 empleando divisor de corriente y compruebe que $P_T = P_1 + P_2$ e igual a la potencia de la fuente de alimentación.



Solución:

$$Z_T = \frac{(30 + 20i)(15 - 30i)}{45 - 10i} = \frac{1050 - 600i}{45 - 10i} = \frac{1209.3 \angle -29.7^\circ}{46.09 \angle -12.52^\circ} = 26.23 \angle -17.18^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_T = 26.23 \angle 17.18^\circ \Omega$$

$$|I| = \frac{|V|}{|Z_T|} = \frac{50}{26.23} = 1.90 \text{ amp.}$$

$$P = \bar{Z}_T |I|^2 = 26.23 \angle 17.18^\circ (1.90)^2 = 94.69 \angle 17.18^\circ = 90.46 + 27.96i$$

De donde podemos ver que:

$$P_{\text{activa}} = 90.46 \text{ watts}$$

$$P_{\text{reactiva}} = 27.96 \text{ VAR'S}$$

$$P_{\text{aparente}} = |P| = 94.69 \text{ VA}$$

El ángulo de la potencia es el mismo que el de la impedancia conjugada \bar{Z}_T .
El factor de potencia vale:

$$\text{f.p.} = \cos(17.18^\circ) = 0.95_+ \text{ (adelantado).}$$

Cálculo de la potencia en la rama 1:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50 \angle 0^\circ}{26.23 \angle -17.18^\circ} = 1.90 \angle 17.18^\circ \text{ amp.}$$

Por divisor de corriente :

$$I_1 = \frac{(15 - 30i)(1.90 \angle 17.18^\circ)}{45 - 10i} = \frac{63.72}{46.09} \angle 30.32^\circ = 1.38 \angle 30.32^\circ \text{ amp.}$$

$$P_1 = \overline{Z} |I_1|^2 = (30 - 20i)(1.38)^2 = 57.3 - 38i = 68.6 \angle -33.7^\circ$$

$$P_a = 57.3 \text{ watts}$$

$$P_r = 38 \text{ VAR'S}$$

$$P_{ap} = 68.6 \text{ VA}$$

$$f.p. = \cos(-33.7^\circ) = 0.8_ \text{ (atrasado)}$$

Cálculo de la potencia en la rama 2:

$$I = 1.90 \angle 17.18^\circ \text{ amp.}$$

Por divisor de corriente:

$$I_2 = \frac{(30 + 20i)(1.90 \angle 17.18^\circ)}{45 - 10i} = \frac{68.49 \angle 50.87^\circ}{46.09 \angle -12.52^\circ} = 1.48 \angle 63.39^\circ \text{ amp.}$$

$$P_2 = \overline{Z}_2 |I_2|^2 = (15 + 30i)(1.48)^2 = 33 + 66i = 73.46 \angle 63.43^\circ$$

$$P_a = 33 \text{ watts}$$

$$P_r = 66 \text{ VAR'S}$$

$$P_{ap} = 73.4 \text{ VA}$$

$$f.p. = 0.44_ \text{ (adelantado)}$$

Comprobación de la conservación de la potencia. La potencia total debe ser la suma de las potencias de cada rama.

$$P_T = P_1 + P_2$$

$$P_1 = 57.3 - 38i$$

$$P_2 = 33 + 66i$$

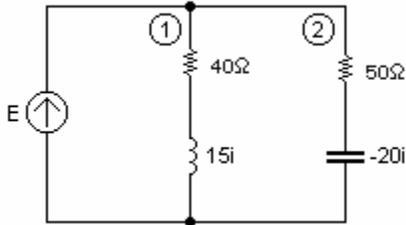
$$P_T = 90.3 + 28i \text{ (resultado coincidente con el obtenido al calcular } P_T \text{ inicialmente).}$$

Cálculo de la potencia en la fuente de alimentación:

$$P_f = \overline{V} I = (50)(1.90 \angle 17.8^\circ) = 95 \angle 17.18^\circ$$

PROBLEMA 4

Encuentre la potencia activa, reactiva y el factor de potencia total del circuito mostrado cuando la potencia reactiva en la rama 2 es de 2000 VAR'S. Dibuje el triángulo de potencias.



Solución:

La potencia en la rama 2 es:

$$P_2 = (50 + 20i)|I_2|^2 = 50|I_2|^2 + i20|I_2|^2 = 50|I_2|^2 + 2000i$$

Igualando partes imaginarias:

$$i20|I_2|^2 = 2000i \therefore |I_2|^2 = \frac{2000}{20} = 100$$

$$|I_2| = 10 \text{ amp.}$$

Este resultado se pudo obtener también sabiendo que la potencia reactiva en la rama 2 es debida al capacitor, así:

$$P_c = \bar{Z}_c |I_2|^2 = 20i |I_2|^2 = 2000i \therefore |I_2| = 10 \text{ amp.}$$

$$|V_1| = |V_2|$$

$$|V_2| = |Z_2| |I_2| = (\sqrt{50^2 + 20^2})(10) = 538.5$$

$$\begin{aligned} P_T = P_1 + P_2 &= \frac{|V_1|^2}{Z_1} + \frac{|V_2|^2}{Z_2} = \frac{(538.5)^2}{40 + 15i} + \frac{(538.5)^2}{50 - 20i} = (538.5)^2 \frac{(50 - 20i + 40 + 15i)}{2300 - 50i} = \\ &= \frac{90 - 5i}{2300 - 50i} (538.5)^2 = \left(\frac{18 - i}{460 - 10i} \right) (538.5)^2 = 11355.4 - 383.5i \end{aligned}$$

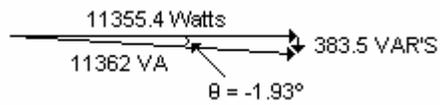
Obteniéndose:

$$P_a = 11355.4 \text{ watts}$$

$$P_r = 383.5 \text{ VAR'S}$$

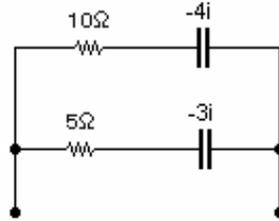
$$f.p. = \cos(-1.93^\circ) = 0.99_ \text{ (atrasado)}$$

Triángulo de potencias:



PROBLEMA 5

Obtenga el triángulo de potencias total y el factor de potencia del circuito dado, si la potencia reactiva consumida es de 1000 VAR'S (capacitivos o adelantados)

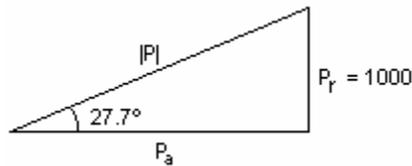


Solución:

$$\bar{Z}_T = \frac{(5 - 3i)(10 - 4i)}{15 - 7i} = \frac{38 - 50i}{15 - 7i} = \frac{62.80 \angle -52.7^\circ}{16.55 \angle -25^\circ} = 3.79 \angle -27.7^\circ \Omega$$

$$\bar{Z}_T = 3.79 \angle 27.7^\circ \Omega$$

Como el ángulo de la impedancia conjugada es el mismo que el de la potencia ($P = \bar{Z} |I|^2$), podemos calcular por funciones trigonométricas la potencia activa y la potencia aparente.



$$\operatorname{tg}(27.7^\circ) = \frac{1000}{P_a}$$

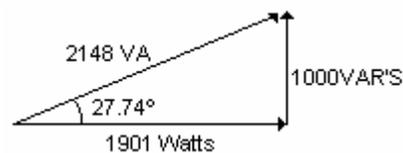
$$\therefore P_a = \frac{1000}{0.5259} = 1901 \text{ watts}$$

Potencia aparente = |P|:

$$\sin(27.74^\circ) = \frac{1000}{|P|} \therefore |P| = \frac{1000}{0.465460} = 2148 \text{ VA}$$

$$f.p. = \cos(27.74^\circ) = 0.88_+ (\text{adelantado})$$

con lo cual, el triángulo de potencias queda:



Otro método:

$$\text{Conocida la } \bar{Z}_T = 3.793 \angle 27.74^\circ = 3.3576 + 1.7664i \ \Omega$$

podemos aplicar $P = \bar{Z} |I|^2$:

$$P = 3.3576 |I|^2 + 1.7664 |I|^2 i$$

Sabemos que $P_r = +1000 \text{ VAR'S}$ (capacitivos o adelantados) por lo que:

$$1.7664 |I|^2 = 1000 \therefore |I|^2 = \frac{1000}{1.7664} = 566.1231$$

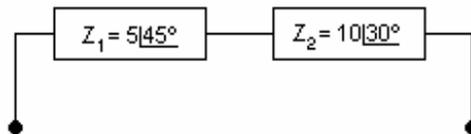
$$P = 3.35(566.1231) + 1.76(566.1231)i = 1901 + 1000i$$

$$|P| = \sqrt{1901^2 + 1000^2} = 2148 \text{ VA}$$

que son los mismos resultados obtenidos anteriormente.

PROBLEMA 6

La potencia reactiva consumida por dos impedancias $Z_1 = 5\angle 45^\circ \Omega$ y $Z_2 = 10\angle 30^\circ \Omega$ en serie es 1920 VAR'S en retraso (inductivos). Hallar la potencia activa P_a y la potencia aparente $|P|$, así como el factor de potencia. Obtenga el triángulo de potencias.



Potencia reactiva = 1920 VAR'S (inductivos)

Solución:

$$Z_1 = 3.53 + 3.53i$$

$$Z_2 = 8.66 + 5i$$

$$P_T = P_1 + P_2$$

$$P_T = \overline{Z}_1 |I|^2 + \overline{Z}_2 |I|^2 = (3.53 - 3.53i + 8.66 - 5i) |I|^2 = (12.19 - 8.53i) |I|^2$$

igualando partes imaginarias:

$$-8.53i |I|^2 = -1920i$$

$$\therefore |I|^2 = \frac{1920}{8.53} = 225.08$$

$$P_T = 2744 - 1920i = 3350 \angle -35^\circ$$

Así que :

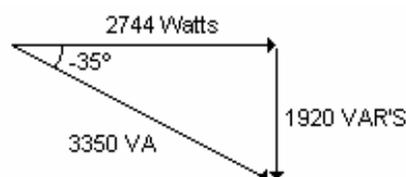
$$P_a = 2744 \text{ watts}$$

$$P_r = 1920 \text{ VAR'S}$$

$$|P_T| = 3350 \text{ V.A.}$$

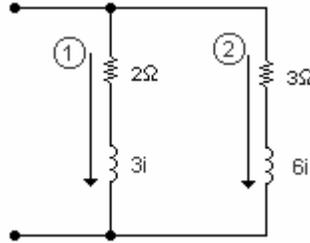
$$f.p = \cos(-35^\circ) = 0.81_ (atrasado)$$

Triángulo de potencias:



PROBLEMA 7

Encuentre la potencia compleja del circuito mostrado, así como el factor de potencia sabiendo que la potencia activa total consumida es de 1500 watts.



Solución:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{|V|^2}{Z_1} + \frac{|V|^2}{Z_2}$$

$$P = \frac{|V|^2}{2+3i} + \frac{|V|^2}{3+6i} = \frac{|V|^2(2-3i)}{13} + \frac{|V|^2(3-6i)}{45} \dots\dots\dots(1)$$

la parte real de la suma de los dos últimos términos de la ecuación (1) es la potencia real o activa total, entonces:

$$\frac{2|V|^2}{13} + \frac{3|V|^2}{45} = 1500$$

$$|V|^2 \left(\frac{2}{13} + \frac{3}{45} \right) = 1500$$

$$|V|^2 \left(\frac{129}{585} \right) = 1500$$

$$\therefore |V|^2 = \frac{(1500)(585)}{129} = 6802$$

sustituyendo $|V|^2 = 6802$ en cada término de (1):

$$P_1 = \frac{(6802)(2 - 3i)}{13} = 1046.46 - 1569.7i$$

$$P_2 = \frac{(6802)(3 - 6i)}{45} = 453.46 - 907i$$

$$P = P_1 + P_2 = 1046.46 - 1569.7i + 453.46 - 907i = 1500 - 2477i = 2895 \angle -58.8^\circ$$

$$P_a = 1500 \text{ Watts}$$

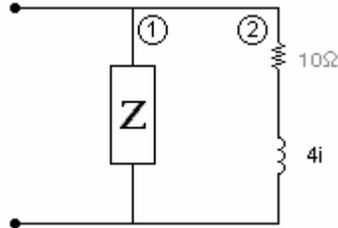
$$P_r = 2477 \text{ VAR'S}$$

$$|P| = 2895 \text{ VA}$$

$$f.p. = \cos(-58.8^\circ) = 0.518 \text{ (atrasado)}$$

PROBLEMA 8

En el circuito mostrado la potencia en el resistor de 10Ω es de 1000 watts y en el circuito total es de 5000 VA con un factor de potencia de 0.90 adelantado. Hallar Z .



Solución: Método 1

$$\overline{V} I = \overline{V} I_1 + \overline{V} I_2$$

$$\text{ang } \cos(0.90) = 25.84^\circ$$

$$P_{2a} = R_2 |I_2|^2 = \text{potencia activa en la rama 2}$$

$$1000 = 10 |I_2|^2$$

$$\therefore |I_2|^2 = 100$$

$$|I_2| = 10 \text{ amp.}$$

$$V_2 = V = (10 + 4i)10$$

$$V = 107.70 \angle 21.8^\circ \text{ volts}$$

$$\overline{V} I = 5000 \angle 25.84^\circ$$

$$\therefore I = \frac{5000 \angle 25.84^\circ}{107.70 \angle -21.8^\circ} = 46.42 \angle 47.64^\circ \text{ amp.}$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$46.42 \angle 47.64^\circ = I_1 + 10$$

$$\therefore I_1 = 46.42 \angle 47.64^\circ - 10 = 31.27 + 34.30i - 10 = 21.27 + 34.30i = 40.35 \angle 58.19^\circ \text{ amp.}$$

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V}{I_1} = \frac{107.70 \angle 21.8^\circ}{40.35 \angle 58.19^\circ} = Z$$

$$Z = 2.66 \angle -36.39^\circ = 2.14 - 1.57i \ \Omega$$

Método 2.

$$\text{ang } \cos(0.90) = 25.84^\circ$$

Pot. activa en la rama 2 = 1000 *watts*

$$1000 = R_2 |I_2|^2$$

$$\therefore |I_2|^2 = \frac{1000}{10} = 100$$

$$|I_2| = I_2 = 10 \text{ amp.}$$

$$V = V_2 = Z_2 I_2$$

$$V = (10 + 4i)10 = 107.70 \angle 21.8^\circ \text{ volts}$$

$$|V|^2 = 11600$$

$$P_T = \frac{|V|^2}{Z_T}$$

$$5000 \angle 25.84^\circ = \frac{11600}{Z_T}$$

$$\therefore Z_T = \frac{11600}{5000 \angle 25.84^\circ} = 2.32 \angle -25.84^\circ \Omega$$

Asimismo

$$Z_T = \frac{Z(10 + 4i)}{Z + 10 + 4i}$$

$$2.32 \angle -25.84^\circ = \frac{Z(10 + 4i)}{Z + 10 + 4i}$$

haciendo operaciones algebraicas para despejar a Z, obtenemos:

$$Z = 2.14 - 1.57i \Omega$$

Método 3.

$$\text{ang } \cos(0.90) = 25.84^\circ$$

$$P_T = \frac{|V|^2}{Z_T} = \frac{|V|^2}{Z} + \frac{|V|^2}{10 + 4i} \dots\dots\dots(1)$$

La parte real o potencia activa en la rama 2 vale 1000 watts

$$R_e \left\{ \frac{|V|^2}{10 + 4i} \right\} = 1000$$

$$\frac{10|V|^2}{116} = 1000 \therefore |V|^2 = 11600$$

Sustituyendo valores en la ecuación (1) :

$$5000 \angle 25.84^\circ = \frac{11600}{Z} + \frac{11600}{10 + 4i}$$

$$4500 + 2179i = \frac{11600}{Z} + 1077 \angle -21.8^\circ$$

$$4500 + 2179i = \frac{11600}{Z} + 1000 - 400i$$

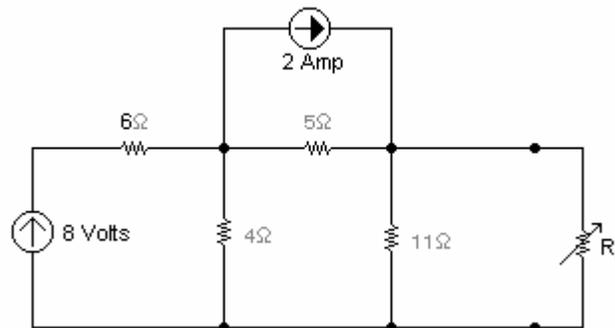
$$\frac{11600}{Z} = 3500 + 2579i$$

$$\therefore Z = \frac{11600}{3500 + 2579i} = \frac{11600}{4347.5} \angle -36.38^\circ = 2.668 \angle -36.38^\circ$$

$$Z = 2.14 - 1.57i \quad \Omega$$

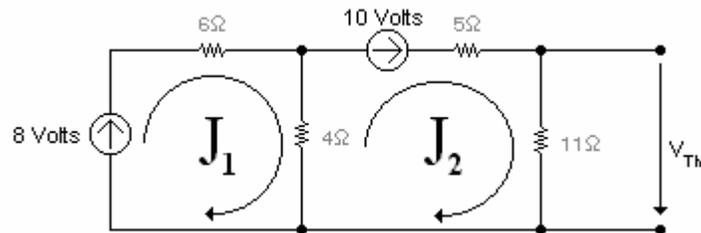
PROBLEMA 9

En la red de C.D. dada halle el valor de R_L para el cual se tendrá una máxima transferencia de potencia. Calcule la potencia máxima.



Solución:

1. Por intercambio de fuentes simplificamos la red.



2. Se deberá hallar el circuito equivalente de Thévenin.

$$V_{Th} = 11J_2$$

$$10J_1 - 4J_2 = 8$$

$$-4J_1 + 20J_2 = 10$$

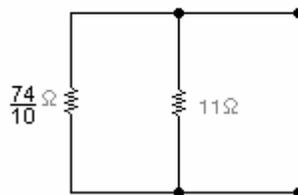
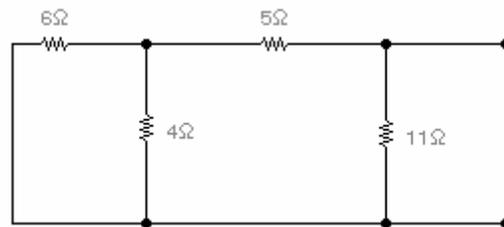
$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{132}{184} = 0.7173 \text{ amp.}$$

120

Problemario de Circuitos Eléctricos II

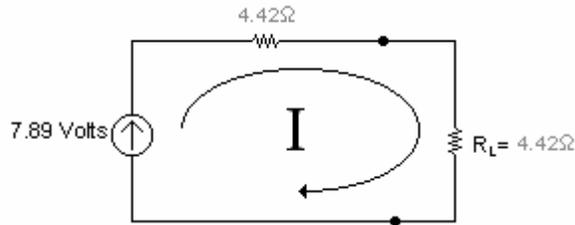
$$V_{Th} = 11(0.7173) = 7.89 \text{ volts}$$

La resistencia de Thévenin se calcula de:



$$R_{Th} = 4.42 \Omega$$

3. Se calcula la potencia máxima en R_L .



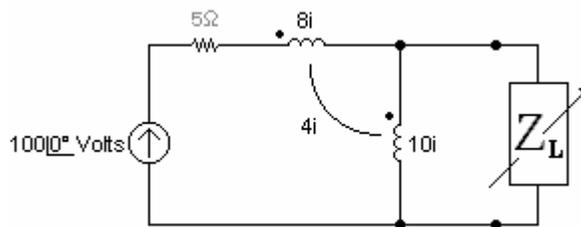
El valor de R_L debe ser igual al de R_{Th} para que se transfiera la máxima potencia.

$$I = \frac{7.89}{8.84} = 0.892 \text{ amp.}$$

$$Pot_{max} = R_L |I|^2 = 4.42(0.892)^2 = 3.51 \text{ watts}$$

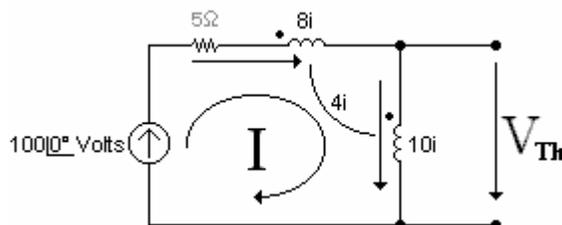
PROBLEMA 10

En el circuito mostrado encuentre el valor de la impedancia de carga Z_L que dé lugar a la transferencia de potencia máxima y calcule dicha potencia.



Solución:

1. Hallemos el circuito equivalente de Thévenin, obteniendo V_{Th} de:



$$Z_{T1} I = 100$$

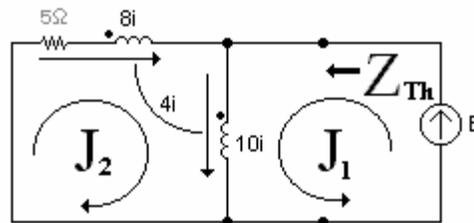
$$Z_{T1} = 5 + 8i + 10i + 2(4i) = 5 + 26i$$

$$(5 + 26i)I = 100 \therefore I = \frac{100}{5 + 26i} = \frac{500 - 2600i}{701}$$

$$I = 0.7132 - 3.70i \text{ amp.}$$

$$V_{Th} = 10iI + 4iI = 14i(0.7132 - 3.70i) = 51.8 + 9.984i = 52.75 \angle 10.9^\circ \text{ volts}$$

Cálculo de la impedancia de Thévenin:



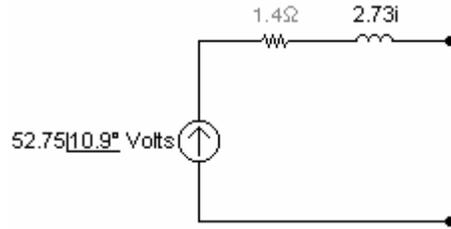
$$Z_{T1} = 10i$$

$$Z_{T2} = 5 + 8i + 10i + 2(4i) = 5 + 26i$$

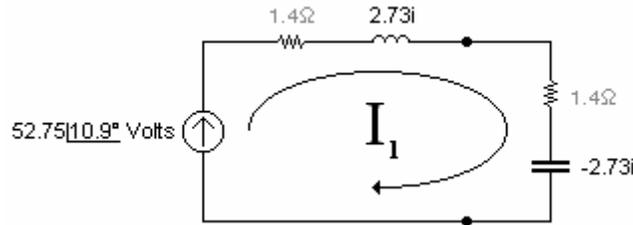
$$Z_{T3} = 10i + 4i = 14i$$

$$Z_{Th} = \frac{\begin{vmatrix} 10i & 14i \\ 14i & 5 + 26i \end{vmatrix}}{5 + 26i} = \frac{-64 + 50i}{5 + 26i} = \frac{980 + 1914i}{701} = 1.4 + 2.73i$$

El circuito equivalente de Thévenin es:



2. La máxima transferencia de potencia tiene lugar cuando $Z_L = \overline{Z}_{Th}$



La impedancia total del circuito es:

$$Z_T = 1.4 + 2.73i + 1.4 - 2.73i = 2.8\Omega$$

3. Calculemos I_1 (nótese que la carga se reduce a 1.4Ω , porque la bobina y el condensador se anulan).

$$I_1 = \frac{V}{Z_T} = \frac{52.75\angle 10.9^\circ}{2.8} = 18.83\angle 10.9^\circ \text{ amp.}$$

y la potencia máxima transferida es :

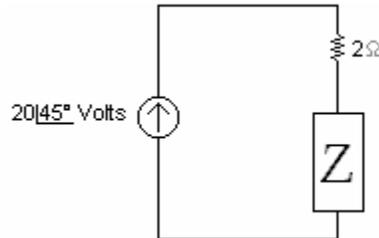
$$Pot_{max} = R_L |I_1|^2 = 1.4(18.83)^2$$

$$Pot_{max} = 496 \text{ watts}$$

***PROBLEMAS
COMPLEMENTARIOS***

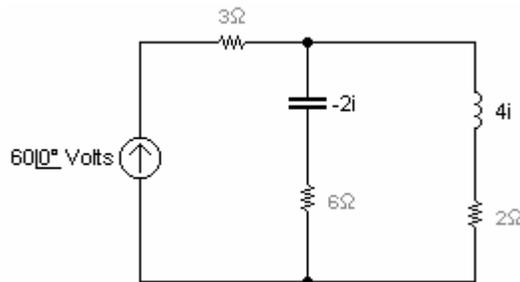
PROBLEMA 1

El circuito serie mostrado consume 64 watts con un factor de potencia de 0.8 en retraso. Hallar la impedancia Z y el triángulo de potencias.



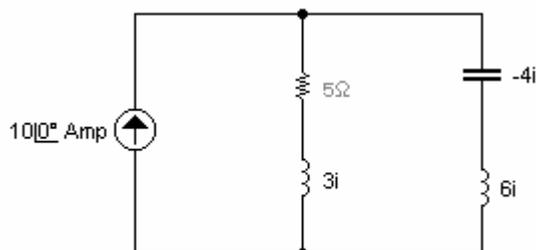
PROBLEMA 2

Encuentre la potencia compleja y el factor de potencia en cada rama de la red dada. Compruebe la conservación de la potencia compleja.



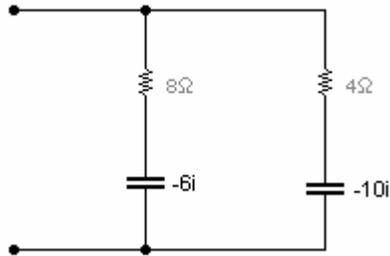
PROBLEMA 3

Empleando divisor de corriente encuentre la potencia en cada rama del circuito dado y compruebe que $P_{fc} = P_1 + P_2$.



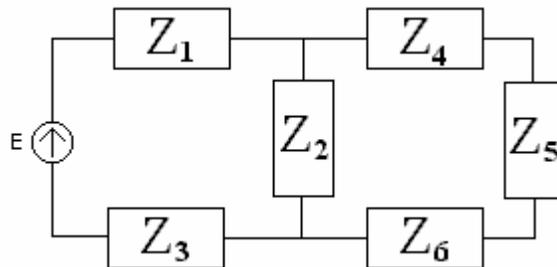
PROBLEMA 4

Mediante funciones trigonométricas obtenga la potencia reactiva, aparente y el factor de potencia del circuito dado, sabiendo que la potencia activa consumida es de 2000 watts. Dibuje el triángulo de potencias.



PROBLEMA 5

En la siguiente configuración calcule la potencia aparente, activa, reactiva y el factor de potencia en Z_5 . Obtenga el triángulo de potencias en dicha impedancia.



$$E=20\angle 0^\circ \text{ volts}$$

$$Z_1 = 3$$

$$Z_2 = 2+2i$$

$$Z_3 = 2i$$

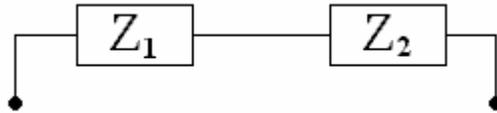
$$Z_4 = 1 + i$$

$$Z_5 = 4 + i$$

$$Z_6 = 1 + 2i$$

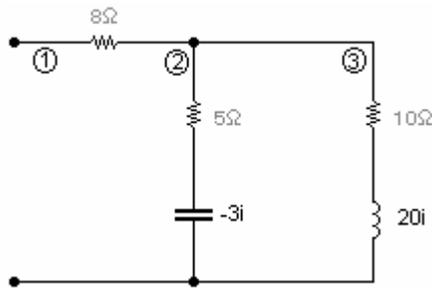
PROBLEMA 6

La potencia reactiva consumida por dos impedancias $Z_1 = 8\angle -15^\circ \Omega$ y $Z_2 = 20\angle -45^\circ \Omega$ en serie es de 800 VAR'S adelantados. Hallar la potencia activa, aparente y el factor de potencia.



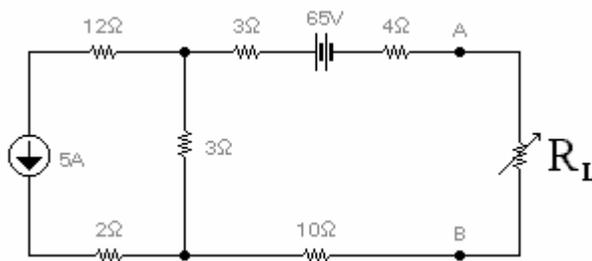
PROBLEMA 7

Calcule la potencia compleja en cada rama del circuito dado, cuando la potencia reactiva en la rama 3 es de 500 VAR'S.



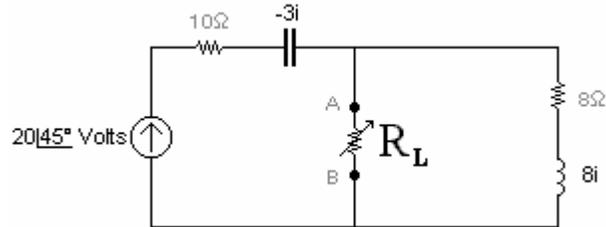
PROBLEMA 8

En el circuito mostrado determine el valor de R_L al cual se le transfiera la máxima potencia y calcule dicha potencia.



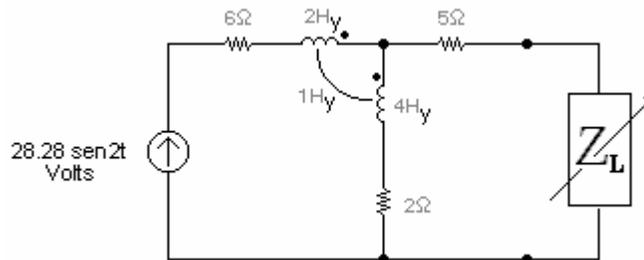
PROBLEMA 9

En el circuito dado determine el valor de R_L que dé lugar a la máxima transferencia de potencia. Calcule la potencia máxima suministrada a la carga.



PROBLEMA 10

En el circuito mostrado encuentre el valor de la impedancia de carga Z_L que dé lugar a la transferencia de potencia máxima y calcule dicha potencia.



***PROBLEMAS
COMPLEMENTARIOS***

PROBLEMA 1

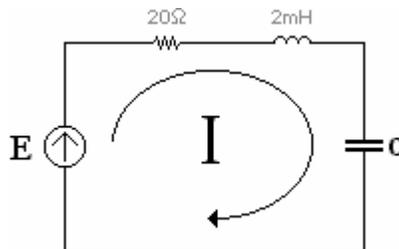
Diseñe un circuito RLC serie resonante para la corriente con una tensión de entrada de $5\angle 0^\circ$ volts que tenga las siguientes especificaciones:

- Una corriente pico de 10 mA.
- Un ancho de banda de 120 Hz.
- Una frecuencia de resonancia de 3×10^3 Hz.

Encuentre R , L y C y las frecuencias de corte.

PROBLEMA 2

Un circuito RLC serie con $R=20 \Omega$ y $L=2$ mHy operando a una frecuencia de 500 Hz tiene un ángulo de fase de 45° en adelante. Hallar la frecuencia de resonancia para la corriente del circuito.



PROBLEMA 3

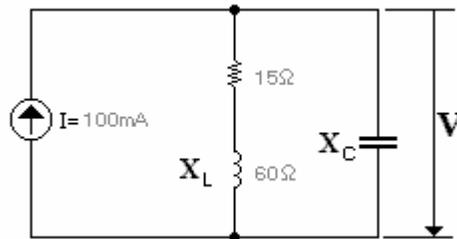
La tensión aplicada a un circuito serie RLC con $C=16 \mu\text{F}$ es de $v(t) = 120\sqrt{2} \cos(1000t - 30^\circ)$ volts y la corriente que circula es $i(t) = 3\sqrt{2} \sin 1000t$ amp. Encuentre los valores de R y de L ¿cuál será la frecuencia de resonancia ω_0 para la corriente?

PROBLEMA 4

Se tiene un circuito RLC serie con una frecuencia de resonancia para la corriente de $f_0 = 300$ Hz y un ancho de banda $AB = 100$ Hz. Encuentre la Q_0 del circuito y las frecuencias de corte f_1 y f_2 .

PROBLEMA 5

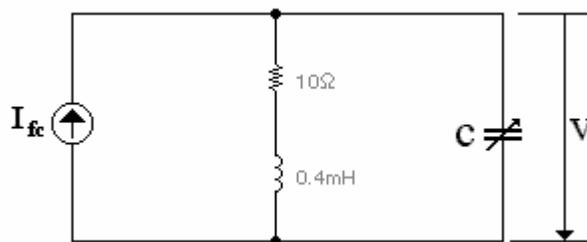
En la red dada:



- Calcule la Q_0 de la red.
- Encuentre el valor de X_C para la resonancia en V .
- Determine la frecuencia de resonancia f_0 si el ancho de banda es de 5000 Hz.
- Calcule el máximo valor de la tensión V_C .
- Calcule las frecuencias de corte f_1 y f_2 .

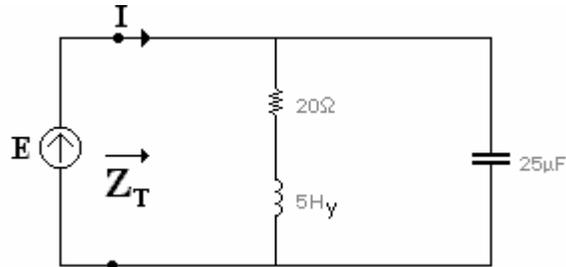
PROBLEMA 6

Calcule el valor de C para que el circuito mostrado entre en resonancia para V a una frecuencia angular $\omega_0 = 25000$ rad/seg.



PROBLEMA 7

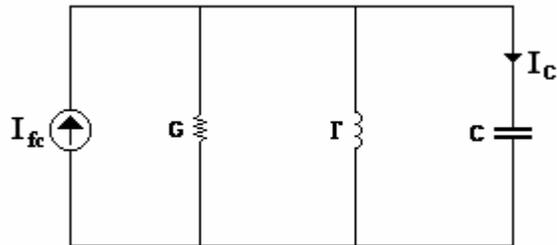
En el circuito dado:



- a) Encuentre la frecuencia ω_0 que haga mínima la corriente I .
- b) Calcule las reactancias X_L y X_C a esta frecuencia.
- c) Encuentre Z_T a la frecuencia ω_0 .
- d) Si $E=200\angle 0^\circ$ volts encuentre I , I_L e I_C .

PROBLEMA 8

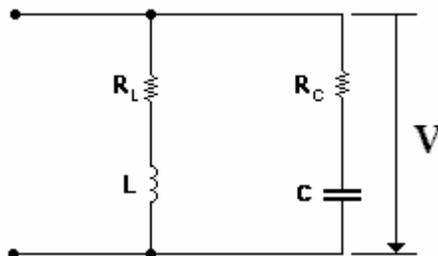
En el circuito RLC paralelo que se muestra:



- a) Encuentre por dualidad la frecuencia de resonancia ω_0 para la corriente en el capacitor y la expresión para el módulo máximo de dicha corriente (ver problema núm. 7 resuelto).
- b) Verifique los resultados anteriores haciendo el desarrollo completo del método.

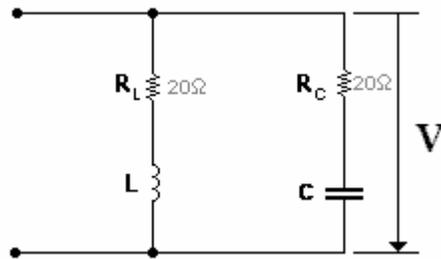
PROBLEMA 9

Deduzca la expresión para calcular la frecuencia de resonancia para V en el circuito paralelo de dos ramas mostrado.



PROBLEMA 10

En el circuito paralelo de dos ramas que se muestra, encuentre el valor de L y de C para que la red entre en resonancia para V a cualquier frecuencia. Exprese la condición que relacione a R_L , R_C , L y C .

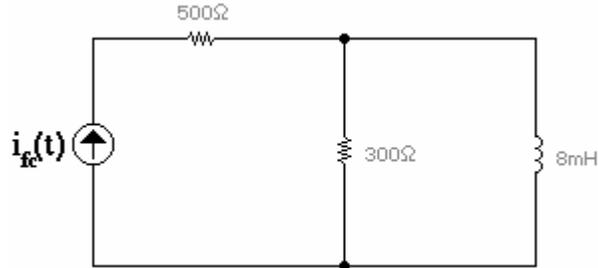


CAPÍTULO V

REDES CON MULTIFRECUENCIAS

PROBLEMA 1

En el circuito dado $i_{fc}(t) = 5 + 10\text{sen}1000t + 15\text{sen}(2000t + 30^\circ)$ amp. Calcule el voltaje instantáneo en la bobina y en el resistor en serie con la fuente.



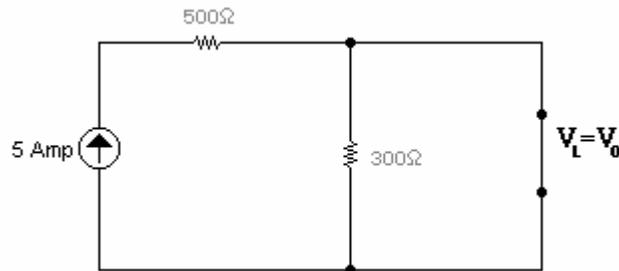
Solución:

Se observa que la fuente posee término constante y términos senoidales, por lo que habrá que resolver la red auxiliar de C.D. y la red auxiliar de C.A. Calcularemos primeramente el voltaje en la bobina en cada red auxiliar.

Red auxiliar de C.D.

En corriente directa la bobina se comporta como corto circuito.

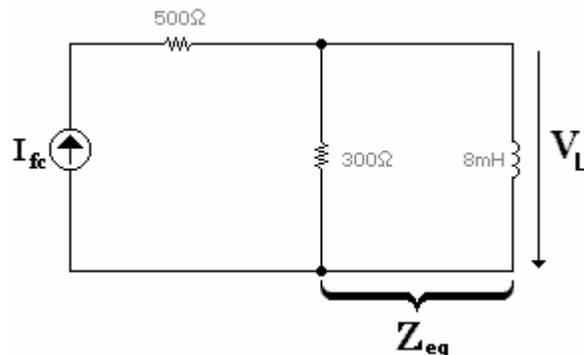
$$Z_L = i\omega L = i(0)L = 0 \quad \Omega$$



Por tanto $V_0 = 0$ volts

Red auxiliar de C.A.

La red auxiliar de C.A. es el circuito original con corrientes y voltajes complejos.



En el análisis de problemas con fuentes senoidales de diferentes frecuencias se aplica el teorema de superposición, es decir, haremos actuar por separado cada término de la fuente para obtener una respuesta parcial y la suma de estas respuestas parciales será la respuesta total.

El voltaje en la bobina está dado por:

$$V_L = Z_{eq} I$$

Consideremos primeramente el término

$$i'_{fc}(t) = 10 \text{sen} 1000t \leftrightarrow 10 \angle 0^\circ$$

para $\omega = 1000 \text{rad/seg}$, $I' = 10 \angle 0^\circ \text{ amp}$.

$$Z'_{eq} = \left[\frac{(300)(ix10^3)(8x10^{-3})}{300 + (ix10^3)(8x10^{-3})} \right] = \frac{2400 \angle 90^\circ}{300.1 \angle 1.52^\circ} = 7.99 \angle 88.48^\circ \Omega$$

$$V' = Z'_{eq} I' = (7.99 \angle 88.48^\circ)(10 \angle 0^\circ)$$

$$V' = 79.9 \angle 88.48^\circ \text{ volts}$$

Este complejo corresponde a la senoide

$$v'(t) = 79.9 \text{sen}(1000t + 88.48^\circ) \text{ volts}$$

Ahora consideremos el segundo término senoidal de la fuente.

$$i''(t) = 15 \text{sen}(2000t + 30^\circ) \leftrightarrow 15 \angle 30^\circ$$

para $\omega = 2000 \text{rad/seg}$, $I'' = 15 \angle 30^\circ \text{ amp}$.

$$Z''_{eq} = \frac{(300)(i)(2x10^3)(8x10^{-3})}{300 + i(2x10^3)(8x10^{-3})} = \frac{300x16i}{300 + 16i} = \frac{4800 \angle 90^\circ}{300.42 \angle 3.05^\circ} = 15.97 \angle 86.95^\circ \Omega$$

$$V'' = Z''_{eq} I'' = (15.97 \angle 86.95^\circ)(15 \angle 30^\circ) = 239.55 \angle 116.95^\circ \text{ volts}$$

Cuya senoide correspondiente es:

$$v''(t) = 239.55 \text{sen}(2000t + 116.95^\circ) \text{ volts}$$

Por lo que el voltaje instantáneo en la bobina es:

$$v_L(t) = v_0 + v'(t) + v''(t)$$

$$v_L(t) = 79.9\text{sen}(1000t + 88.48^\circ) + 239.55\text{sen}(2000t + 116.95^\circ) \text{ volts}$$

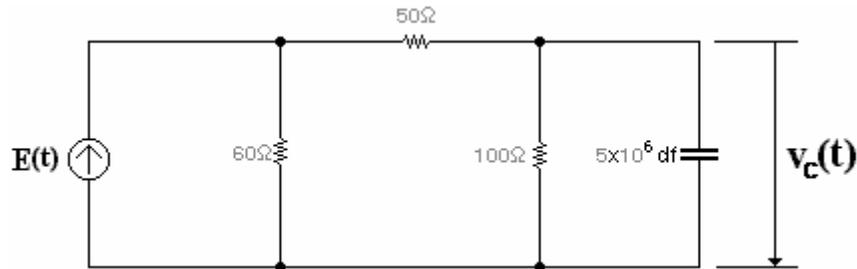
El voltaje instantáneo en el resistor de 500Ω es:

$$v_R(t) = 500 i_{fC}(t) \text{ volts}$$

$$v_R(t) = 2500 + 5000\text{sen}1000t + 7500\text{sen}(2000t + 30^\circ) \text{ volts}$$

PROBLEMA 2

Calcule el voltaje instantáneo en el capacitor del circuito mostrado, cuando la fuente es $E(t) = 10 + 5\text{sen}(10^6 t + 60^\circ)$ volts.

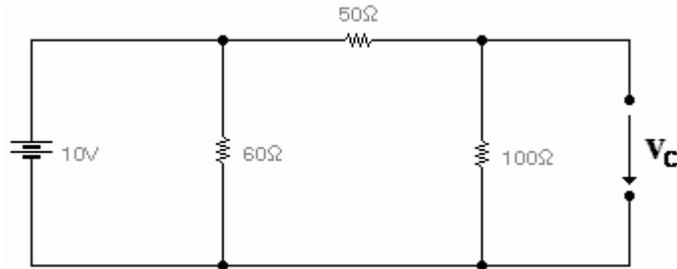


Solución:

Red auxiliar de C.D.

Consideremos el término constante de $E(t)$. En corriente directa el capacitor se comporta como circuito abierto.

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(0)C} = \infty \Omega$$

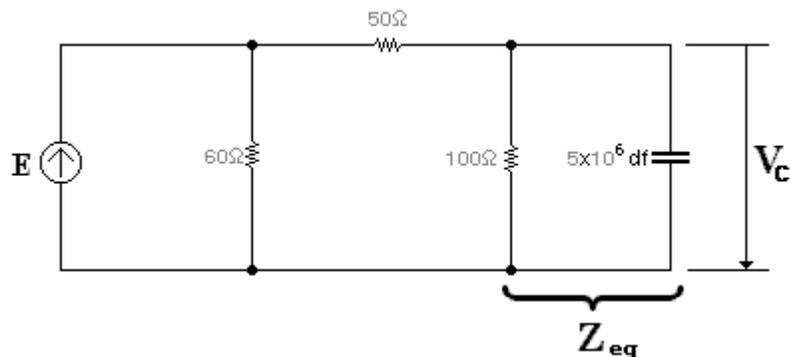


Por divisor de voltaje:

$$V_{100} = \frac{100(10)}{50 + 100} = \frac{10^3}{150} = 6.66 \text{ volts}$$

$$V_0 = 6.66 \text{ volts } (V_0 = v_c)$$

Red auxiliar de C.A.



Consideremos ahora el término senoidal de $E(t)$.

$$E'(t) = 5\text{sen}(10^6 t + 60^\circ) \leftrightarrow 5\angle 60^\circ$$

para $\omega = 10^6 \text{ rad/seg}$, $E' = 5\angle 60^\circ$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{5 \times 10^6 i}{\omega} = -\frac{5 \times 10^6 i}{10^6}$$

$$Z_C = -5i \ \Omega$$

A la impedancia en paralelo del resistor de 100Ω y el capacitor la designamos como Z_{eq} (indicada en la red auxiliar de C.A.).

$$Z_{eq} = \frac{100(-5i)}{100 - 5i} = \frac{500\angle -90^\circ}{100.125\angle -2.86^\circ}$$

$$Z_{eq} = 4.994\angle -87.14^\circ = 0.249 - 4.98i \cong 0.25 - 5i \ \Omega$$

Aplicando divisor de voltaje para hallar el voltaje en el capacitor, tendremos:

$$V'_C = \frac{(Z_{eq})E'}{50 + Z_{eq}} = \frac{(4.994\angle -87.14^\circ)(5\angle 60^\circ)}{50 + 0.25 - 5i} = \frac{25\angle -27.14^\circ}{50.25 - 5i} = \frac{25\angle -27.14^\circ}{50.5\angle -5.68^\circ}$$

$$V'_C = 0.495\angle -21.46^\circ \text{ volts}$$

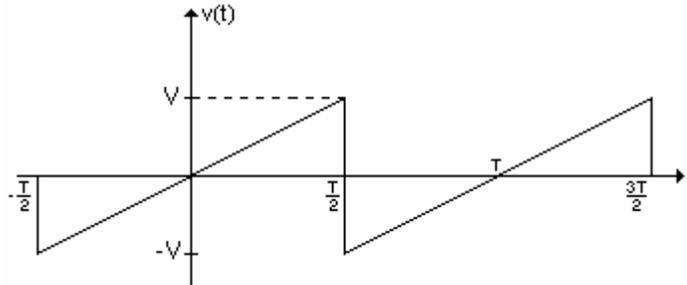
El voltaje instantáneo en el capacitor es la suma de las respuestas parciales de los términos de la fuente $E(t)$.

$$v_C(t) = v_0 + v'_C(t)$$

$$v_C(t) = 6.66 + 0.495\text{sen}(10^6 t - 21.46^\circ) \text{ volts}$$

PROBLEMA 3

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la onda “diente de sierra” dada.



Solución:

En la figura se puede observar lo siguiente:

1. El valor medio de la función es cero.
2. La función es impar, por lo tanto sólo contendrá términos senos (todas las constantes a_n serán cero).

La serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

En forma compacta :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Los coeficientes de Fourier se calculan de:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt \quad n = 1,2,3,\dots$$

Cálculo de $\frac{a_0}{2}$.

Al sustituir $n = 0$ en a_n :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) (\cos 0\omega t) dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

En nuestro caso elegiremos $t_0 = -\frac{T}{2}$.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Pudimos tomar $t_0=0$, pero esto implicaría integrar dos intervalos de la función (de $0 < t < T/2$ y de $T/2 < t < T$). Así que tomando $t_0 = -T/2$ el único intervalo a integrar es $T/2 < t < T/2$.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2V}{T} \right) t dt = \frac{1}{T} \left(\frac{2V}{T} \right) \frac{t^2}{2} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{V}{T^2} \left[\left(\frac{T}{2} \right)^2 - \left(-\frac{T}{2} \right)^2 \right] = 0$$

Cálculo de a_n .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2V}{T} t \cos n\omega t dt = \frac{4V}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \cos n\omega t dt.$$

Integrando por partes:

$$u = t \therefore du = dt$$

$$dv = \cos n\omega t dt \therefore v = \frac{1}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega t$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

sustituyendo expresiones:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4V}{T^2} \left[\frac{t}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega t \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{n\omega} \operatorname{sen} n\omega t dt \right] \\ &= \frac{4V}{T^2} \left[\underbrace{\frac{T}{2n\omega} \left(\operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) + \frac{T}{2n\omega} \left(\operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{T}{2} \right) \right)}_0 + \frac{1}{n^2 \omega^2} \cos n\omega t \Big|_{-T/2}^{T/2} \right] \\ &= \frac{4V}{T^2} \left[\frac{1}{n^2 \omega^2} \cos n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - \frac{1}{n^2 \omega^2} \cos n \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{T}{2} \right) \right] \\ &= \left(\frac{4V}{T^2} \right) \left(\frac{1}{n^2 \omega^2} \right) [\cos n\pi - \cos n(-\pi)] = 0 \end{aligned}$$

Cálculo de b_n .

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2V}{T} t \operatorname{sen} n\omega t dt = \frac{4V}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} t \operatorname{sen} n\omega t dt$$

Integrando por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = t \therefore du = dt$$

$$dv = \operatorname{sen} n\omega t dt \therefore v = -\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t$$

$$b_n = \frac{4V}{T^2} \left\{ \underbrace{-\frac{t}{n\omega} \cos n\omega t}_{\mathbf{A}} \Big|_{-T/2}^{T/2} + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{n\omega} \cos n\omega t dt}_{\mathbf{B}} \right\}$$

$$\mathbf{A} = \frac{4V}{T^2} \left\{ -\frac{T^2}{4\pi n} \cos n\omega \frac{T}{2} - \frac{T^2}{4n\pi} \cos n\omega \left(-\frac{T}{2}\right) \right\}$$

$$\mathbf{A} = \frac{4V}{T^2} \left(\frac{T^2}{4n\pi} \right) \left\{ -\cos n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2} - \cos n \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{T}{2}\right) \right\} = \frac{V}{n\pi} [-\cos n\pi - \cos n(-\pi)]$$

$$\mathbf{A} = -2 \frac{V}{n\pi} \cos n\pi$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{n^2 \omega^2} \operatorname{sen} n\omega t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{n^2 \omega^2} \left[\operatorname{sen} n \left(\frac{2\pi}{T} \right) \frac{T}{2} - \operatorname{sen} n \left(\frac{2\pi}{T} \right) \left(-\frac{T}{2}\right) \right]$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{n^2 \omega^2} [\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen} n(-\pi)] = 0$$

$$b_n = \mathbf{A} + \mathbf{B} = -\frac{2V}{n\pi} \cos n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La función $\cos n\pi$ es positiva para n par y negativa para n impar, con lo que el signo de los coeficientes se alterna. Así, la serie trigonométrica de Fourier es:

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\omega t + \dots \right\}$$

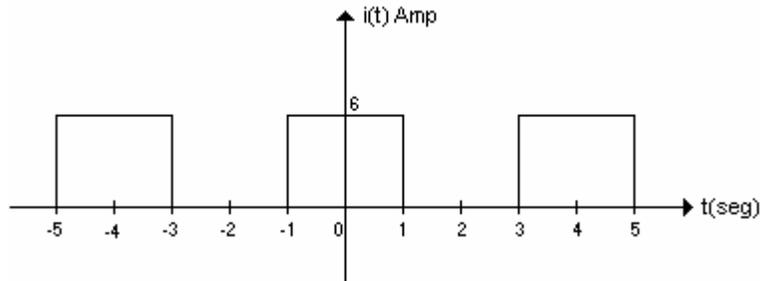
En forma compacta :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2V}{n\pi} (\cos n\pi) (\operatorname{sen} n\omega t) \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega t$$

PROBLEMA 4

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la corriente $i(t)$ dada por el pulso rectangular que se muestra.



Solución:

De la forma de onda dada se puede observar lo siguiente:

1. La función es par, por lo tanto la serie sólo contendrá términos cosenos (todas las constantes b_n serán cero) más una constante $\frac{a_0}{2}$.
2. La función es susceptible de tener simetría de media onda, por lo que la serie contendrá solamente términos impares cosenos más la constante $\frac{a_0}{2}$.
3. El valor medio de $i(t)$ es 3:

La serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

En forma compacta :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Cálculo de $\frac{a_0}{2}$.

Los límites de integración de la función $f(t)$ en un ciclo pueden tomarse en diversos intervalos, por ejemplo si tomamos $t_0=0$ debemos realizar tres integrales, en los siguientes intervalos:

$$f(t) = \begin{cases} 6 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 3 \\ 6 & 3 < t < 4 \end{cases}$$

Si $t_0 = -1$, únicamente tenemos que realizar dos integrales:

$$f(t) = \begin{cases} 6 & -1 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 3 \end{cases}$$

En la figura se ve que $T=4$ seg. por lo que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Eligiendo $t_0 = -1$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \left[\int_{-1}^1 6 dt + \int_1^3 0 dt \right] = \frac{6}{4} t \Big|_{-1}^1 = \frac{6}{4} [1+1] = 3$$

Cálculo de a_n .

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \cos n\omega t dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \cos n\omega t dt = 3 \int_{-1}^1 \cos n \frac{\pi}{2} t dt = 3 \left(\frac{2}{n\pi} \right) \text{senn} \frac{\pi}{2} t \Big|_{-1}^1$$

$$a_n = \frac{6}{n\pi} \left[\text{senn} \frac{\pi}{2} - \text{senn} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{6}{n\pi} \left[\text{senn} \frac{\pi}{2} + \text{senn} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{12}{n\pi} \text{senn} \frac{\pi}{2}$$

Cálculo de b_n .

$$b_n = \frac{2}{4} \int_{-1}^1 6 \text{senn} \omega t dt + \frac{2}{4} \int_1^3 0 \text{senn} \omega t dt = \frac{3}{n\omega} (-\cos n\omega t) \Big|_{-1}^1$$

$$b_n = -\frac{3}{n\omega} [\cos n\omega(1) - \cos n\omega(-1)]; \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = -\frac{6}{n\pi} \left[\cos n \frac{\pi}{2} - \cos n \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 0$$

De la expresión calculada para $a_n = \frac{12}{n\pi} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2}$ se ve que $a_n = 0$ para $n=2,4,6,\dots$ y para n impar los signos se alternan, por lo que la serie sólo contiene cosenos impares más una constante $\frac{a_0}{2}$. Así, la serie trigonométrica de Fourier es:

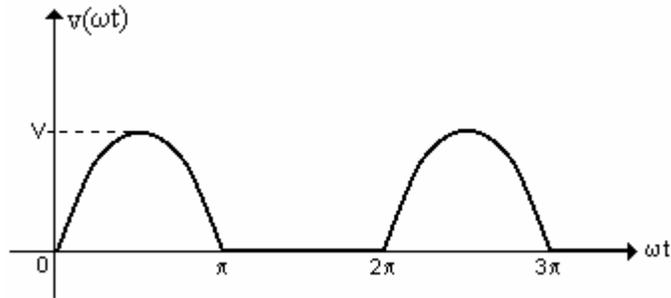
$$i(t) = 3 + \frac{12}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{7} \cos \frac{7\pi}{2} + \dots \right)$$

En forma compacta :

$$i(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} \cos n \frac{\pi}{2} t$$

PROBLEMA 5

Expresé mediante su serie trigonométrica de Fourier la señal senoidal rectificada de media onda que se muestra en la figura.



Solución:

Se observa que la función no presenta ningún tipo de simetría, por lo que no es par ni impar y la serie contendrá términos senos y cosenos.

La serie de Fourier tiene la forma:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

Cálculo de a_0 .

Nótese que en este problema la variable es ωt .

$$v(t) = \begin{cases} V \operatorname{sen} \omega t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} V \operatorname{sen} \omega t d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d(\omega t) \right] = \frac{V}{2\pi} \left[-\cos \omega t \right]_0^{\pi} = -\frac{V}{2\pi} [\cos \pi - \cos 0]$$

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{V}{2\pi} [-1 - 1] = \frac{V}{\pi}$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$f(t) = \begin{cases} V \operatorname{sen} \omega t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Se observa que $T = 2\pi$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^\pi V \operatorname{sen} \omega t \cos n\omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} 0 d(\omega t) \right] = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \omega t \cos n\omega t d(\omega t)$$

Auxiliándonos en tablas de integrales la función a integrar tiene la forma:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx dx \quad \text{donde} \quad m = 1, \quad n = n, \quad x = \omega t$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen} \omega t \cos n\omega t d(\omega t) &= \left\{ -\frac{\cos[(1+n)\omega t]}{2(1+n)} - \frac{\cos[(1-n)\omega t]}{2(1-n)} \right\}_0^\pi = \\ &= -\frac{\cos[(1+n)\pi]}{2(1+n)} - \frac{\cos[(1-n)\pi]}{2(1-n)} + \frac{\cos[(1+n)0]}{2(1+n)} + \frac{\cos[(1-n)0]}{2(1-n)} \\ &= -\frac{\cos(\pi + n\pi)}{2(1+n)} - \frac{\cos(\pi - n\pi)}{2(1-n)} + \frac{\cos 0}{2(1+n)} + \frac{\cos 0}{2(1-n)} \end{aligned}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas siguientes:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad \text{y}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} &= -\frac{\cos \pi \cos n\pi - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} n\pi}{2(1+n)} - \frac{\cos \pi \cos n\pi + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} n\pi}{2(1-n)} + \frac{\cos 0}{2(1+n)} + \frac{\cos 0}{2(1-n)} \\ &= \frac{\cos n\pi}{2(1+n)} + \frac{\cos n\pi}{2(1-n)} + \frac{2}{2(1-n^2)} = \cos n\pi \left[\frac{(1-n)+(1+n)}{2(1-n^2)} \right] + \frac{1}{(1-n^2)} \end{aligned}$$

$$= \cos n\pi \left[\frac{2}{2(1-n^2)} \right] + \frac{1}{(1-n^2)} = \frac{\cos n\pi}{1-n^2} + \frac{1}{1-n^2} = \frac{\cos n\pi + 1}{1-n^2}$$

pero

$$a_n = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \sin \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{\cos n\pi + 1}{1-n^2} \right] = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + 1)$$

$$a_n = \frac{2V}{\pi(1-n^2)} \quad \text{para } n = 2, 4, 6, \dots$$

$$\text{y } a_n = 0 \quad \text{para } n = 3, 5, 7, \dots$$

Cuando $n=1$ la expresión para $a_n = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + 1)$ se indetermina, por lo que habrá que evaluarla por separado para $n=1$.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t)$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, obtenemos:

$$a_1 = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[-\frac{1}{4} \cos 2\omega t \right]_0^\pi = -\frac{V}{4\pi} [\cos 2\pi - \cos 0]$$

$$a_1 = 0$$

por lo que, finalmente $a_n = 0$ para $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Cálculo de b_n .

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$v(t) = \begin{cases} V \sin \omega t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$T = 2\pi$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^\pi V \sin \omega t \sin n\omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} 0 d(\omega t) \right] = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \sin \omega t \sin n\omega t d(\omega t)$$

Por tablas de integrales:

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)} + \frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} + c$$

donde $m=1, n=n$ y $x = \omega t$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \text{sen } \omega t \text{ sen } n\omega t d(\omega t) &= \left\{ -\frac{\text{sen}[(1+n)\omega t]}{2(1+n)} + \frac{\text{sen}[(1-n)\omega t]}{2(1-n)} \right\}_0^\pi \\
 &= -\frac{\text{sen}[(1+n)\pi]}{2(1+n)} + \frac{\text{sen}[(1-n)\pi]}{2(1-n)} + \frac{\text{sen}[(1+n)0]}{2(1+n)} - \frac{\text{sen}[(1-n)0]}{2(1-n)}^* \\
 &= -\frac{\text{sen}(\pi + n\pi)}{2(1+n)} + \frac{\text{sen}(\pi - n\pi)}{2(1-n)}
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas siguientes:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b \quad \text{y}$$

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b$$

$$= \underbrace{\frac{\text{sen } \pi \cos n\pi + \cos \pi \text{ sen } n\pi}{2(1+n)}}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\frac{\text{sen } \pi \cos n\pi - \cos \pi \text{ sen } n\pi}{2(1-n)}}_{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{A} = 0 \quad \forall n.$$

$$\mathbf{B} = \frac{\text{sen } \pi \cos n\pi - \cos \pi \text{ sen } n\pi}{2(1-n)} = \frac{0}{2(1-n)} = 0 \quad \forall n \neq 1$$

y

$$\int_0^\pi \text{sen } \omega t \text{ sen } n\omega t d(\omega t) = 0 \quad \forall n \neq 1$$

$$\text{pero } b_n = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } \omega t \text{ sen } n\omega t d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{V}{\pi} \left[\frac{0}{2(1-n)} \right] = 0 \quad \forall n \neq 1$$

con $n=1$ la expresión para b_n se indetermina, por lo que b_1 deberá evaluarse por separado.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \text{sen } \omega t \text{ sen } \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\text{sen} 2\omega t}{4} \right]_0^\pi = \frac{V}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{V}{2}$$

Sustituyendo valores en la serie de Fourier dada por:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \text{sen } \omega t + b_2 \text{sen } 2\omega t + \dots$$

* Puede verse que la integral buscada vale cero para toda $n \neq 1$, sin embargo se hace un desarrollo similar al que se usó para el cálculo de a_n con el fin de clarificar el resultado.

Elvio Candelaria Cruz
obtenemos

197

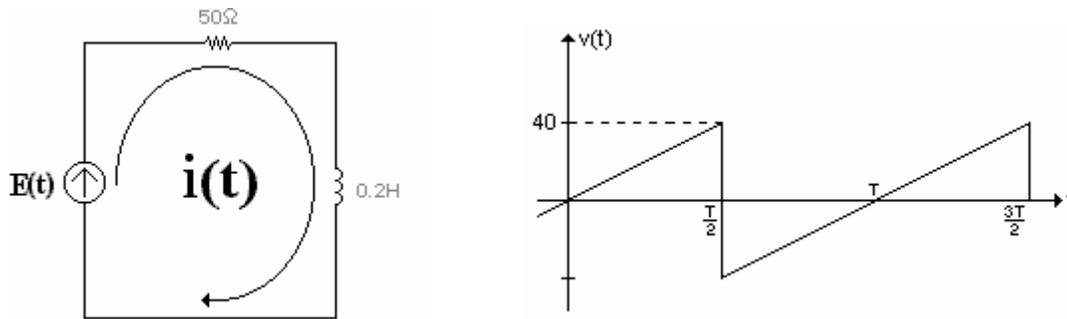
$$v(t) = \frac{V}{\pi} + \frac{2V}{\pi(1-4)} \cos 2\omega t + \frac{2V}{\pi(1-16)} \cos 4\omega t + \frac{2V}{\pi(1-36)} \cos 6\omega t + \dots + \frac{V}{2} \operatorname{sen} \omega t$$

$$v(t) = \frac{V}{\pi} - \frac{2V}{\pi} \left[\frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \frac{\cos 6\omega t}{35} + \dots \right] + \frac{V}{2} \operatorname{sen} \omega t$$

$$v(t) = \frac{V}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right]$$

PROBLEMA 6

Se aplica la señal de la gráfica al circuito mostrado. Encuentre la corriente instantánea $i(t)$. Considere $\omega=10^3 \text{ rad/seg}$.



Solución:

La señal en diente de sierra de la figura ha sido analizada en el problema núm. 3, habiéndose obtenido la serie de Fourier siguiente:

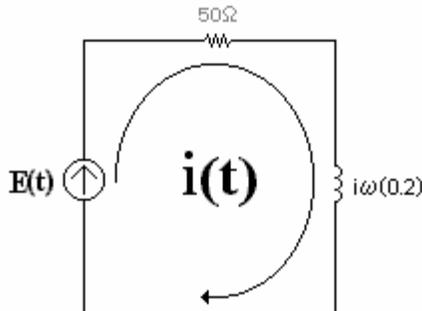
$$v(t) = \frac{2V}{\pi} \left[\text{sen } \omega t - \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega t + \frac{1}{3} \text{sen } 3\omega t - \frac{1}{4} \text{sen } 4\omega t + \dots \right]$$

Sustituyendo valores y con una aproximación de los tres primeros armónicos de la serie, tendremos

$$E(t) = 25.46 \text{sen } 1000t - 12.73 \text{sen } 2000t + 8.48 \text{sen } 3000t - \dots$$

Analizaremos ahora la red dada como una red con multifrecuencias.

Red auxiliar de C.A.



Empleando superposición tendremos:
Primer armónico de la serie o término fundamental

$$E'(t) = 25.46 \text{sen}1000t \leftrightarrow E' = 25.46 \underline{0^\circ}$$

Para $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$ la impedancia de la red es

$$Z'_T = 50 + i(10^3)(.2) = 50 + 200i = 206.15 \angle 75.96^\circ \Omega$$

$$I' = \frac{E'}{Z'_T} = \frac{25.46 \angle 0^\circ}{206.15 \angle 75.96^\circ} = 123.5 \times 10^{-3} \angle -75.96^\circ \text{ amp.}$$

Por lo que la función senoidal correspondiente es

$$i'(t) = 123.5 \times 10^{-3} \text{sen}(1000t - 75.96^\circ) \text{ amp.}$$

Segundo armónico

$$E''(t) = -12.73 \text{sen}2000t \leftrightarrow E'' = 12.73 \angle -180^\circ \text{ volts}$$

Para $\omega = 2000 \text{ rad/seg}$

$$Z''_T = 50 + i(2 \times 10^3)(0.2) = 50 + 400i = 403.11 \angle 82.87^\circ \Omega$$

$$I'' = \frac{E''}{Z''_T} = \frac{12.73 \angle -180^\circ}{403.11 \angle 82.87^\circ} = 31.57 \times 10^{-3} \angle -262.87^\circ = 31.57 \times 10^{-3} \angle 97.13^\circ \text{ amp.}$$

$$i''(t) = 31.57 \times 10^{-3} \text{sen}(2000t + 97.13^\circ) \text{ amp.}$$

Tercer armónico

$$E'''(t) = 8.48 \text{sen}3000t \leftrightarrow E''' = 8.48 \angle 0^\circ$$

Para $\omega = 3000 \text{ rad/seg}$ la impedancia de la red es

$$Z'''_T = 50 + i(3 \times 10^3)(0.2) = 50 + 600i = 602 \angle 85.23^\circ \Omega$$

$$I''' = \frac{E'''}{Z'''_T} = \frac{8.48 \angle 0^\circ}{602 \angle 85.23^\circ} = 14.08 \times 10^{-3} \angle -85.23^\circ \text{ amp.}$$

$$i'''(t) = 14.08 \times 10^{-3} \text{sen}(3000t - 85.23^\circ) \text{ amp.}$$

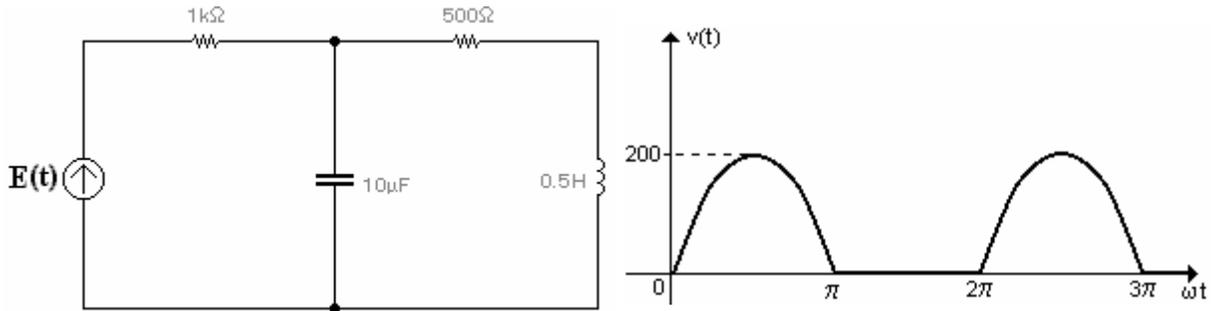
La suma de las corrientes parciales halladas es la corriente instantánea del circuito.

$$i(t) = i'(t) + i''(t) + i'''(t)$$

$$i(t) = 123.5 \times 10^{-3} \text{sen}(1000t - 75.96^\circ) + 31.57 \times 10^{-3} \text{sen}(2000t + 97.13^\circ) \\ + 14.08 \times 10^{-3} \text{sen}(3000t - 85.23^\circ) \text{ amp.}$$

PROBLEMA 7

Encuentre la corriente instantánea que circula por la bobina de la red mostrada cuando $E(t)$ está dado por la señal rectificadora de media onda mostrada en la gráfica. Considere $\omega=377 \text{ rad/seg}$.



Solución:

La señal rectificadora de media onda ha sido analizada en el problema número 5, habiéndose obtenido la serie de Fourier siguiente:

$$v(t) = \frac{V}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \text{sen } \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right]$$

Sustituyendo valores y con una aproximación de los tres primeros términos de la serie, tendremos:

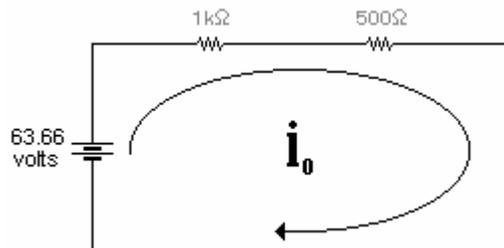
$$E(t) = \frac{200}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \text{sen } 377t - \frac{2}{3} \cos 754t - \dots \right]$$

$$E(t) = 63.66 + 100 \text{sen } 377t - 42.44 \text{sen}(754t + 90^\circ) - \dots$$

Analizaremos ahora la red dada como una red con multifrecuencias.

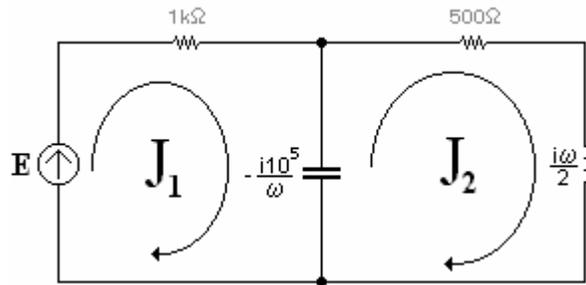
Red auxiliar de C.D.

En corriente directa la bobina se comporta como corto circuito y el capacitor como circuito abierto, por lo que el circuito resultante es:



$$i_0 = \frac{63.66}{1.5 \times 10^3} = 42.44 \times 10^{-3} \text{ amp.}$$

Red auxiliar de C.A.



Consideremos el primer término senoidal o primer armónico.

$$E'(t) = 100\text{sen}377t \leftrightarrow E' = 100\angle 0^\circ$$

Para $\omega = 377 \text{ rad/seg}$ las impedancias de los elementos reactivos valen :

$$Z_c = -\frac{i10^5}{377} = -265i$$

$$Z_L = i(377)\left(\frac{1}{2}\right) = 188.5i$$

Aplicando el método de mallas :

$$Z_{T1} J_1 + Z_{T2} J_2 = 100\angle 0^\circ$$

$$Z_{T1} J_1 + Z_{T2} J_2 = 0$$

$$Z_{T1} = 1000 - 265i$$

$$Z_{T2} = 500 - 265i + 188.5i = 500 - 76.5i$$

$$Z_{T2} = -(-265i) = 265i$$

Sustituyendo las impedancias de mallas en las ecuaciones del método

$$10^2(10 - 2.65i) J_1 + 10^2(2.65i) J_2 = 100$$

$$10^2(2.65i) J_1 + 10^2(5 - .765i) J_2 = 0$$

éstas se reducen a

$$(10 - 2.65i) J_1 + (2.65i) J_2 = 1$$

$$(2.65i) J_1 + (5 - .765i) J_2 = 0$$

$$I' = J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-2.65i & 1 \\ 2.65i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-2.65i & 2.65i \\ 2.65i & 5-0.765i \end{vmatrix}} = \frac{-2.65i}{55-20.9i} = \frac{2.65 \angle -90^\circ}{58.83 \angle -20.8^\circ} = .045 \angle -69.2 \text{ amp.}$$

La función senoidal correspondiente es

$$i'(t) = .045 \text{sen}(377t - 69.2^\circ) \text{ amp.}$$

Consideremos ahora el segundo armónico

$$E''(t) = -42.44 \text{sen}(754t + 90^\circ) \leftrightarrow E'' = 42.44 \angle -90^\circ$$

Para $\omega = 754 \text{ rad/seg}$ las impedancias de los elementos reactivos valen ahora

$$Z_C = -\frac{j10^5}{754} = -132.62i$$

$$Z_L = i(754)(0.5) = 377i$$

Aplicando nuevamente el método de mallas:

$$Z_{T1} = 1000 - 132.62i$$

$$Z_{T2} = 500 - 132.62i + 377i = 500 + 244.37i$$

$$Z_{21} = -(-132.62i) = 132.62i$$

Las nuevas ecuaciones son:

$$(1000 - 132.62i) J_1 + 132.62i J_2 = -42.44i$$

$$132.62i J_1 + (500 + 244.37i) J_2 = 0$$

que se reducen a:

$$(10 - 1.32i) J_1 + 1.32i J_2 = -0.42i$$

$$1.32i J_1 + (5 + 2.44i) J_2 = 0$$

$$I'' = J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-1.32i & -0.42i \\ 1.32i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-1.32i & 1.32i \\ 1.32i & 5+2.44i \end{vmatrix}} = \frac{-0.554}{54.96+17.8i} = \frac{-0.554}{57.77 \angle 17.94^\circ} = -9.6 \times 10^{-3} \angle -17.94^\circ \text{ amp.}$$

$$i''(t) = -9.6 \times 10^{-3} \text{sen}(754t - 17.94^\circ) = 9.6 \times 10^{-3} \text{sen}(754t - 197.94^\circ) \text{ amp.}$$

Finalmente, la corriente instantánea que circula por la bobina es la suma de las corrientes parciales halladas, esto es:

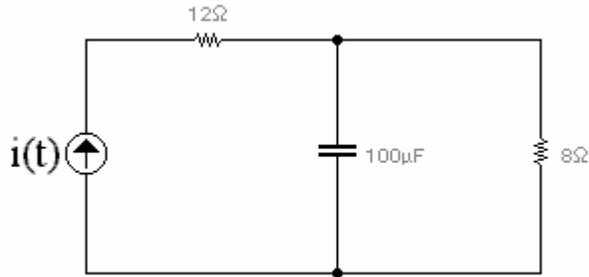
$$i_L(t) = i_0 + i'(t) + i''(t)$$

$$i_L(t) = 42.44 \times 10^{-3} + 0.045 \text{sen}(377t - 69.2^\circ) + 9.6 \times 10^{-3} \text{sen}(754t - 197.94^\circ) \text{ amp.}$$

PROBLEMA 8

En el circuito mostrado calcule la tensión y la intensidad de corriente eficaces en el capacitor cuando la fuente proporciona una señal de la forma

$$i(t) = 15 + 5\cos\omega t + 2\sin(3\omega t + 90^\circ) \text{ amp.}$$



Solución:

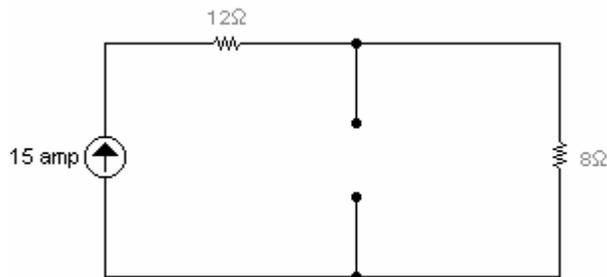
Las expresiones para calcular la tensión y la intensidad de corriente eficaces son:

$$V_{ef} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N V_n^2}$$

$$I_{ef} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N I_n^2}$$

Cálculo de la corriente eficaz en el capacitor

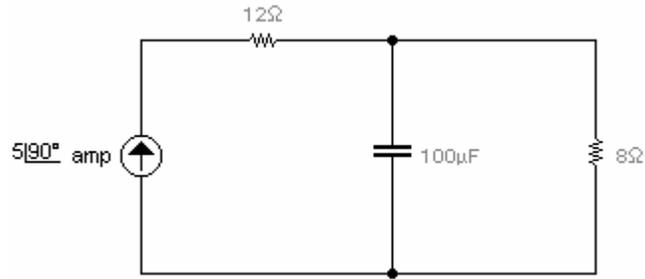
Red auxiliar de C.D.



En C.D. no circula corriente por el capacitor, por comportarse como circuito abierto.

$$I_0 = 0$$

Red auxiliar de C.A.



Para $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$

$$i'(t) = 5\cos(1000t) = 5\text{sen}(1000t + 90^\circ) \leftrightarrow I' = 5\angle 90^\circ$$

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(10^3)(10^2)(10^{-6})} = -10i$$

$$I'_c = \frac{(5\angle 90^\circ)(8)}{8 - 10i} = \frac{40\angle 90^\circ}{12.80\angle -51.34^\circ} = 3.125\angle 141.34^\circ \text{ amp.}$$

$$i'_c(t) = 3.125\text{sen}(1000t + 141.34^\circ) \text{ amp.}$$

Para $\omega = 3000 \text{ rad/seg}$

$$i''(t) = 2\text{sen}(3000t + 90^\circ) \leftrightarrow I'' = 2\angle 90^\circ$$

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(3)(10^3)(10^2)(10^{-6})} = -3.33i$$

$$I''_c = \frac{(2\angle 90^\circ)(8)}{8 - 3.33i} = \frac{16\angle 90^\circ}{8.66\angle -22.6^\circ} = 1.84\angle 112.6^\circ \text{ amp.}$$

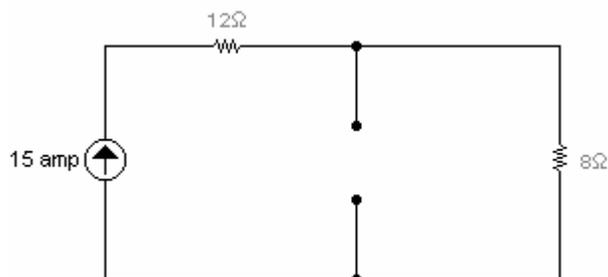
$$i''_c(t) = 1.84\text{sen}(3000t + 112.6^\circ) \text{ amp.}$$

Aplicando la fórmula para encontrar I_{ef}

$$I_{ef} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N I_n^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(3.125^2 + 1.84^2)} = 2.56 \text{ amp.}$$

Cálculo de la tensión eficaz en el capacitor

Red auxiliar de C.D.



$$V_0 = (15)(8) = 120 \text{ volts}$$

Red auxiliar de C.A.

Para $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$

$$V'_c = Z'_c I'_c = (10 \angle -90^\circ)(3.125 \angle 141.34^\circ) = 31.25 \angle 51.34^\circ \text{ volts}$$

$$v'_c(t) = 31.25 \text{sen}(1000t + 51.34^\circ) \text{ volts}$$

Para $\omega = 3000 \text{ rad/seg}$

$$V''_c = Z''_c I''_c = (3.33 \angle -90^\circ)(1.84 \angle 112.6^\circ) = 6.12 \angle 22.6^\circ \text{ volts}$$

$$v''_c(t) = 6.12 \text{sen}(3000t + 22.6^\circ) \text{ volts}$$

Aplicando la fórmula para encontrar V_{ef}

$$V_{ef} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N V_n^2} = \sqrt{120^2 + \frac{1}{2} (31.25^2 + 6.12^2)} = 122 \text{ volts}$$

PROBLEMA 9

Se aplica una tensión $v(t) = 25 + 40 \cos(\omega t - 60^\circ) - 8 \sin(3\omega t + 75^\circ) + 10 \sin \omega t$ volts a las terminales de un circuito pasivo, siendo la intensidad que resulta $i(t) = 5 + 3 \sin(\omega t - 30^\circ) + 2 \cos 3\omega t + 0.5 \cos(5\omega t - 10^\circ)$ amp. Calcule la potencia media del circuito.

Expresando las funciones dadas en términos de senos de amplitud positiva:

$$v(t) = 25 + 40 \sin(\omega t + 30^\circ) + 8 \sin(3\omega t - 105^\circ) + 10 \sin 5\omega t \text{ volts}$$

$$i(t) = 5 + 3 \sin(\omega t - 30^\circ) + 2 \sin(3\omega t + 90^\circ) + 0.5 \sin(5\omega t + 80^\circ) \text{ amp.}$$

La fórmula para calcular la potencia media es:

$$P_m = V_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n)$$

Donde V_0 e I_0 son los términos de C.D. y V_n e I_n son las amplitudes de cada término de C.A. Así

$$V_0 = 25 \qquad V_1 = 40 \qquad V_2 = 8 \qquad V_3 = 10$$

$$I_0 = 5 \qquad I_1 = 3 \qquad I_2 = 2 \qquad I_3 = 0.5$$

$$\alpha_1 - \beta_1 = 30^\circ - (-30^\circ) = 60^\circ$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = -105^\circ - 90^\circ = -195^\circ$$

$$\alpha_3 - \beta_3 = 0^\circ - 80^\circ = -80^\circ$$

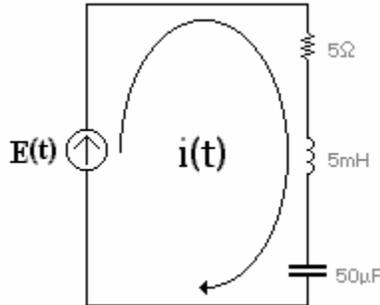
Sustituyendo valores:

$$P_m = (25)(5) + \frac{1}{2} [40 \times 3 \cos 60^\circ + 8 \times 2 \cos(-195^\circ) + 10 \times 0.5 \cos(-80^\circ)] =$$

$$P_m = 125 + \frac{1}{2} (60 - 15.45 + 0.868) = 147.70 \text{ watts}$$

PROBLEMA 10

En el circuito mostrado calcule la corriente eficaz y la potencia media (activa) si se aplica una tensión $E(t) = 15 + 150\text{sen}1000t + 100\text{sen}2000t + 75\text{sen}3000t$ volts.



Solución:

$$V_0 = 15 \text{ volts}; I_0 = 0 \text{ amp.}$$

Para $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$

$$E'(t) = 150\text{sen}1000t \leftrightarrow E' = 150\angle 0^\circ \text{ volts}$$

$$Z_T = 5 + 5i + \frac{1}{i(10^3)(50)(10^{-6})} = 5 - 15i = 15.81\angle -71.56^\circ \Omega$$

$$I' = \frac{E'}{Z_T} = \frac{150\angle 0^\circ}{15.81\angle -71.56^\circ} = 9.48\angle 71.56^\circ \text{ amp.}$$

$$i'(t) = 9.48\text{sen}(1000t + 71.56^\circ) \text{ amp.}$$

Para $\omega = 2000 \text{ rad/seg}$

$$E''(t) = 100\text{sen}2000t \leftrightarrow E'' = 100\angle 0^\circ \text{ volts}$$

$$Z_T = 5 + 10i - 10i = 5 \Omega$$

$$I'' = \frac{E''}{Z_T} = \frac{100\angle 0^\circ}{5} = 20\angle 0^\circ \text{ amp.}$$

$$i''(t) = 20\text{sen}2000t \text{ amp.}$$

para $\omega = 3000 \text{ rad/seg}$

$$E'''(t) = 75\text{sen}3000t \leftrightarrow E''' = 75\angle 0^\circ \text{ volts}$$

$$Z_T = 5 + 15i - 6.66i = 5 + 8.34i = 9.72\angle 59^\circ \Omega$$

$$I''' = \frac{E'''}{Z_T} = \frac{75\angle 0^\circ}{9.72\angle 59^\circ} = 7.71\angle -59^\circ \text{ amp.}$$

$$i'''(t) = 7.71\text{sen}(3000t - 59^\circ) \text{ amp.}$$

Por lo que la corriente instantánea del circuito es

$$i(t) = I_0 + i'(t) + i''(t) + i'''(t)$$

$$i(t) = 9.48\text{sen}(1000t + 71.56^\circ) + 20\text{sen}2000t + 7.71\text{sen}(3000t - 59^\circ) \text{ amp.}$$

Para calcular la corriente eficaz aplicamos

$$I_{ef} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N I_n^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(9.48^2 + 20^2 + 7.71^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(89.87 + 400 + 59.44)} = \sqrt{274.65}$$

$$I_{ef} = 16.57 \text{ amp.}$$

La potencia media o activa se calcula mediante la fórmula

$$P_m = V_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n)$$

$$P_m = \frac{1}{2} [150 \times 9.48 \cos(0^\circ - 71.56^\circ) + 100 \times 20 \cos(0^\circ) + 75 \times 7.71 \cos(0^\circ + 59^\circ)]$$

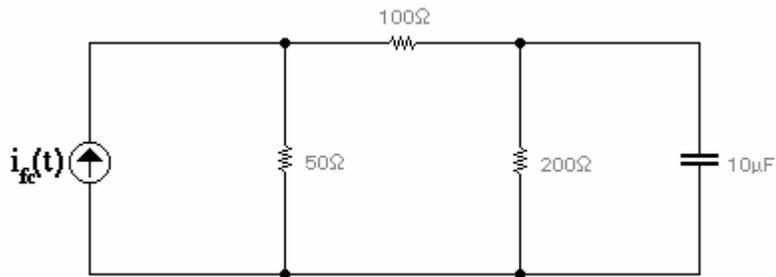
$$P_m = \frac{1}{2} (450 + 2000 + 298)$$

$$P_m = 1374 \text{ watts}$$

***PROBLEMAS
COMPLEMENTARIOS***

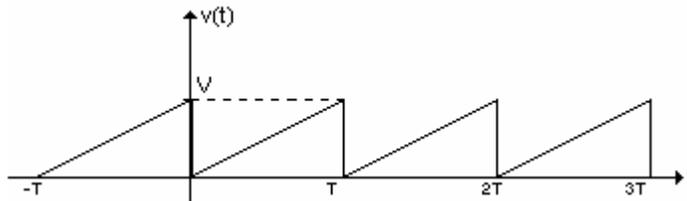
PROBLEMA 1

Calcule el voltaje instantáneo en el capacitor cuando la fuente de corriente es $i_{fc}(t) = 20 + 30\text{sen}(500t + 30^\circ)$ amp.



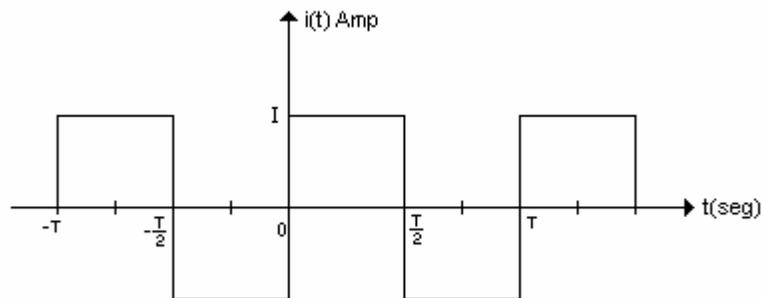
PROBLEMA 2

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la señal “diente de sierra” dada.



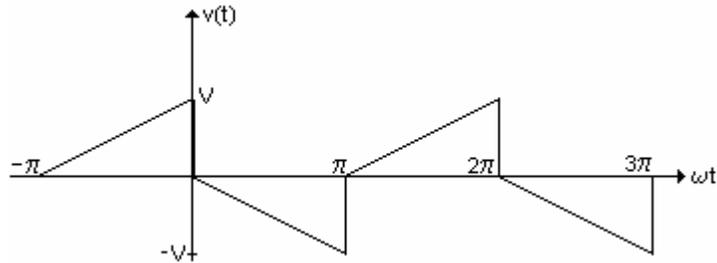
PROBLEMA 3

Determine la serie trigonométrica de Fourier para la onda cuadrada de la figura.



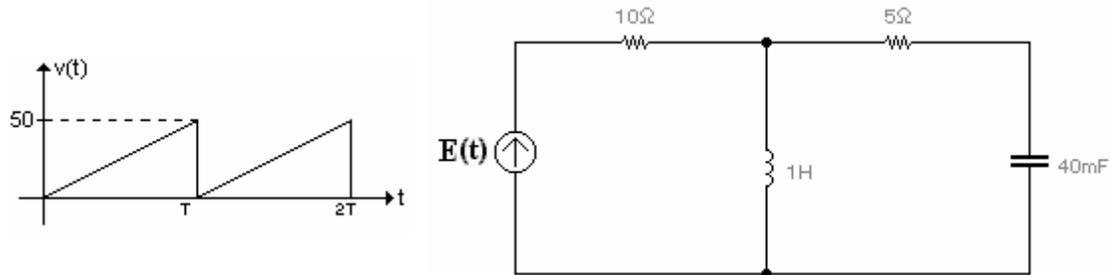
PROBLEMA 4

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la onda mostrada en la figura.



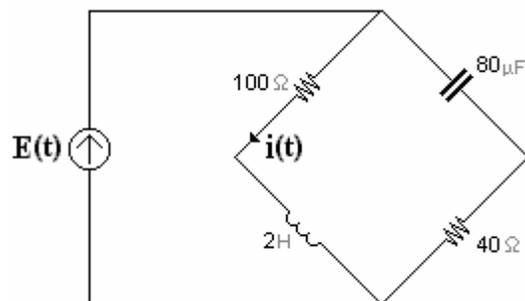
PROBLEMA 5

Se aplica la señal de la gráfica al circuito mostrado. Encuentre el voltaje instantáneo en el capacitor. Considere $\omega=10 \text{ rad/seg}$.



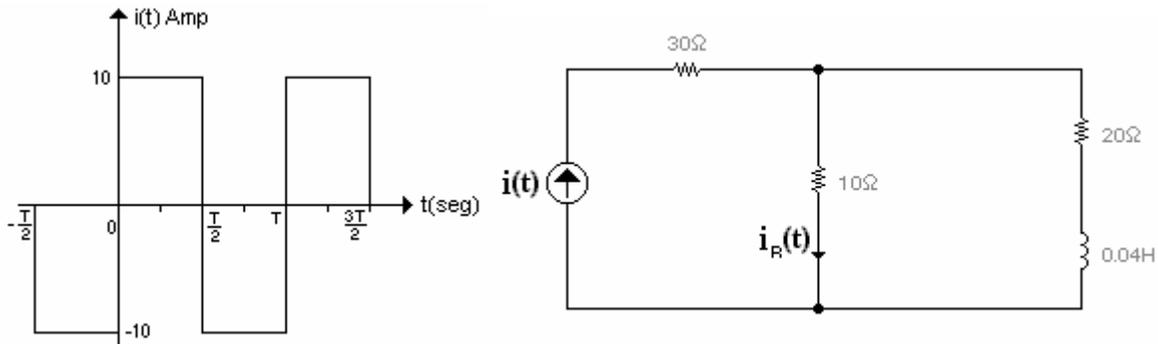
PROBLEMA 6

Dado $E(t) = 20\text{sen}500t + 50\text{sen}(100t + 30^\circ) \text{ volts}$, calcule la corriente instantánea que se indica en el circuito mostrado.



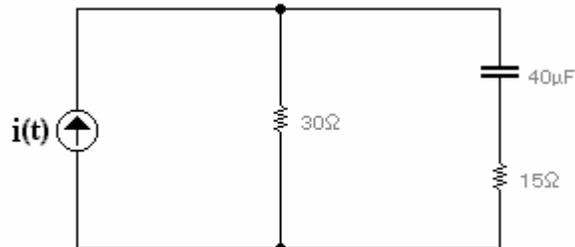
PROBLEMA 7

Encuentre la corriente instantánea $i_R(t)$ que circula por el resistor de 10Ω de la red mostrada cuando $i(t)$ está dada por la señal de la gráfica. Considere $\omega = 200 \text{ rad/seg}$.



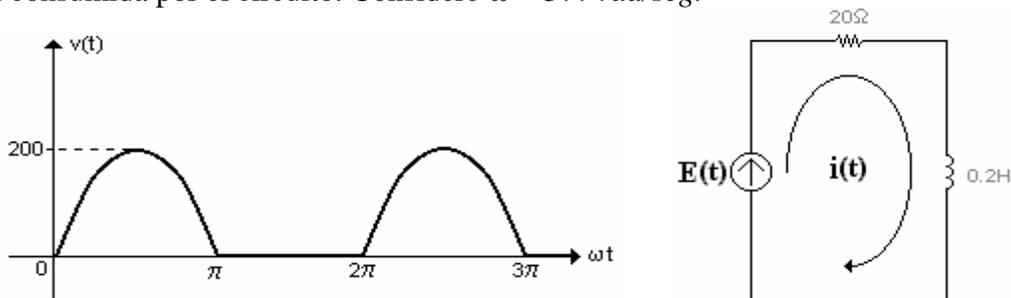
PROBLEMA 8

Calcule el voltaje y la corriente eficaces, así como la potencia media en el resistor de 15Ω cuando la fuente es $i(t) = 5 + 2\text{sen } \omega t + 3\text{sen}(2\omega t + 60^\circ) + 5\text{sen}(3\omega t - 30^\circ) \text{ amp}$. Considere $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$.



PROBLEMA 9

Si $E(t)$ está dado por la señal rectificadora de media onda de la gráfica como $E(t) = 0.318V + 0.5V \text{sen } \omega t - 0.212V \cos 2\omega t - 0.0424V \cos 4\omega t - \dots$ (utilice solamente los tres primeros términos para representar $E(t)$), encuentre la corriente instantánea $i(t)$ que circula por el circuito mostrado, así como la corriente eficaz y la potencia activa total consumida por el circuito. Considere $\omega = 377 \text{ rad/seg}$.



PROBLEMA 10

Se aplica una tensión $v(t) = 60 + 20\text{sen } \omega t + 80\text{sen}(2\omega t + 50^\circ)$ volts a las terminales de un circuito pasivo, siendo la intensidad que resulta

$$i(t) = 2 + 5\text{sen}(\omega t + 60^\circ) + 3\text{sen}(2\omega t - 20^\circ) \text{ amp.}$$

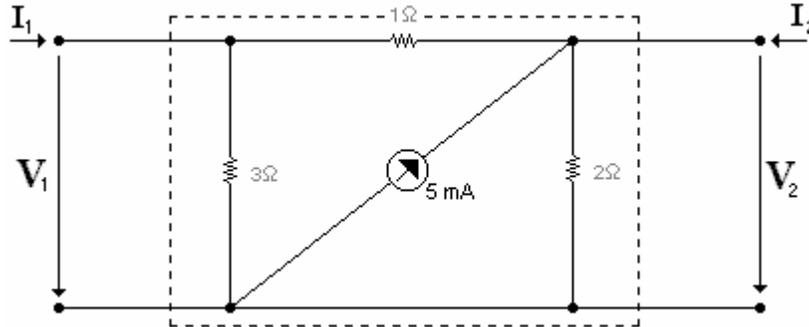
Calcule la tensión y corriente eficaces, así como la potencia media consumida por el circuito.

CAPÍTULO VI

REDES DE DOS PUERTOS

PROBLEMA 1

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de circuito abierto.

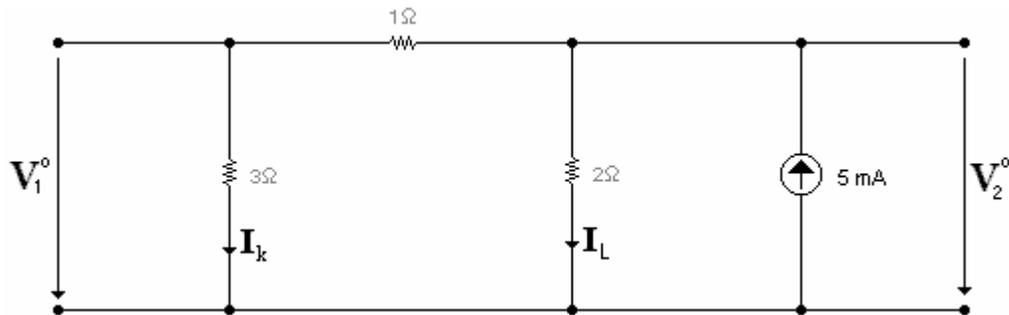


Solución:

Los parámetros de circuito abierto son los parámetros Z . Las ecuaciones con estos parámetros para una red activa son:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + V_1^0 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + V_2^0 \end{aligned}$$

Calculemos primeramente V_1^0 y V_2^0 que son los voltajes debidos a la fuente interna con las terminales del cuadripolo abiertas, como se muestra:



Por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{2(5 \times 10^{-3})}{4 + 2} = \frac{10 \times 10^{-3}}{6} = \frac{10^{-2}}{6} \text{ amp.}$$

$$V_1^0 = 3I_k = 3\left(\frac{10^{-2}}{6}\right) = 5 \times 10^{-3} \text{ volts.}$$

$$I_L = \frac{4(5 \times 10^{-3})}{6} = \frac{10}{3} \times 10^{-3} \text{ amp.}$$

$$V_2^0 = 2 I_L = 2 \left(\frac{10}{3} \times 10^{-3} \right) = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \text{ volts.}$$

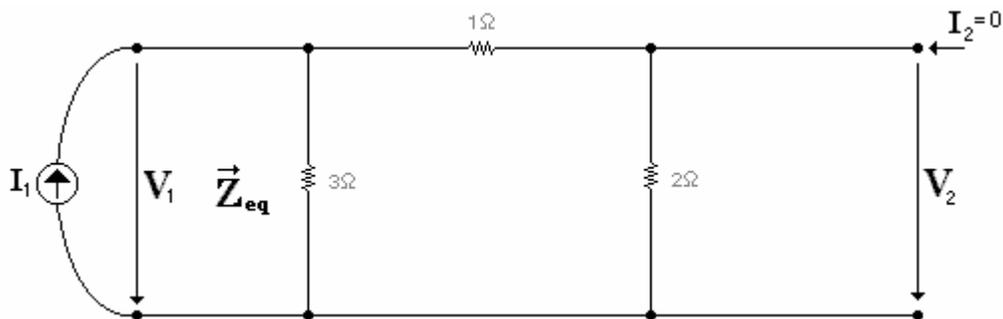
Para calcular los parámetros $Z_{k,l}$ debemos pacificar el cuadripolo (anular fuentes reales) y excitar las terminales correspondientes según las condiciones requeridas.

Cálculo de Z_{11} y Z_{21}

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \rightarrow \text{Impedancia de entrada } [\Omega].$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \rightarrow \text{Impedancia de transferencia directa } [\Omega].$$

En ambos parámetros se tiene la condición de que $I_2 = 0$, por lo que la configuración correspondiente es:



$$Z_{11} = \left. \frac{I_1(Z_{eq})}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{3(3)}{3+3} = \frac{9}{6} = 1.5 \Omega$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

La corriente que pasa por el resistor de 2Ω es:

$$I_{2\Omega} = \frac{3I_1}{3+3} = \frac{I_1}{2} \text{ amp.}$$

Por tanto $V_2 = 2\left(\frac{1}{2}I_1\right) = (1)I_1 \text{ volt}$ y

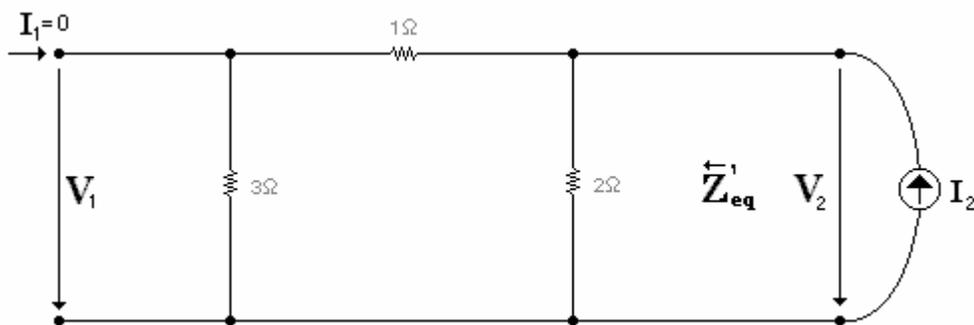
$$Z_{21} = \frac{(1)I_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 1 \Omega$$

Cálculo de Z_{12} y Z_{22}

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow \text{Impedancia de transferencia inversa } [\Omega].$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \rightarrow \text{Impedancia de salida } [\Omega].$$

En ambos parámetros se tiene la condición de que $I_1 = 0$, por lo que la configuración correspondiente es:



$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{3 \left[\frac{2I_2}{4+2} \right]}{I_2} = 1 \Omega$$

Se comprueba que en una red puramente pasiva (no contiene en su interior fuentes de ningún tipo) $Z_{21} = Z_{12}$.

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{Z'_{eq} I_2}{I_2} = \frac{(4)(2)}{4+2} = \frac{4}{3} \Omega$$

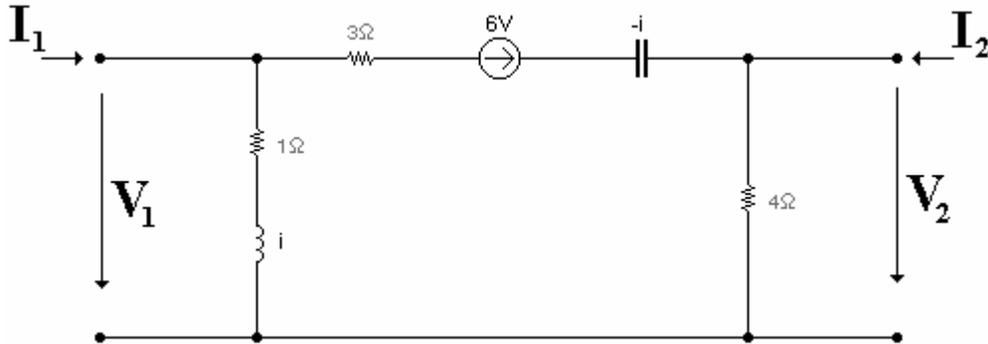
Con los resultados obtenidos podemos establecer las ecuaciones que caracterizan a la red.

$$V_1 = 1.5 I_1 + (1) I_2 + 5 \times 10^{-3} \text{ volts}$$

$$V_2 = (1) I_1 + \frac{4}{3} I_2 + \frac{2}{3} \times 10^{-2} \text{ volts}$$

PROBLEMA 2

Caracterice el siguiente circuito mediante sus parámetros de circuito abierto y obtenga sus circuitos equivalentes en V y en T .

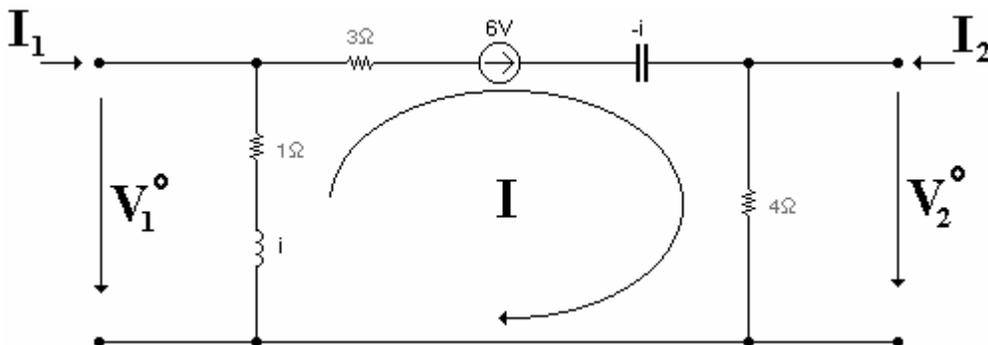


Solución:

Las ecuaciones que caracterizan a una red activa con parámetros de circuito abierto o parámetros Z son:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + V_1^0 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + V_2^0 \end{aligned}$$

Cálculo de V_1^0 . $-V_1^0$ es la caída de voltaje que se tiene de la terminal 1 a su terminal de referencia, debida a la fuente interna, con las terminales del cuadripolo abiertas.



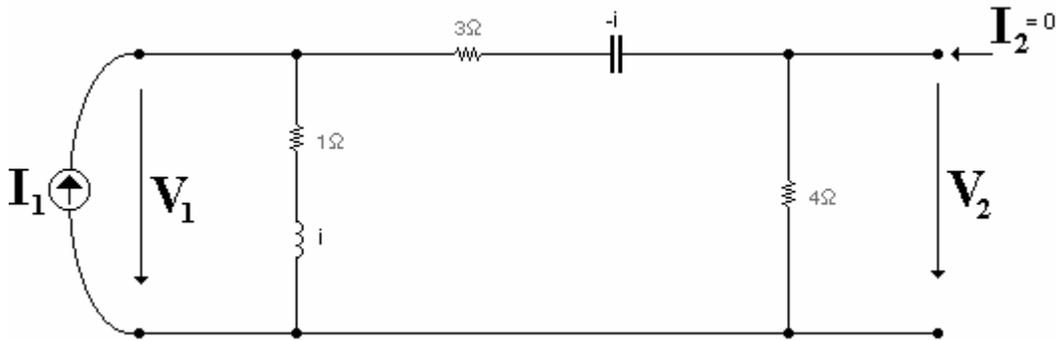
$$V_1^0 = -(1+i)I = -(1+i) \left(\frac{6}{3-i+4+i+1} \right) = -(1+i) \left(\frac{3}{4} \right) = -0.75 - 0.75i = 1.06 \angle -135^\circ \text{ volts.}$$

Cálculo de V_2^0 . Esta caída es la que se tiene de la terminal 2 a su terminal de referencia, con las terminales del cuadripolo abiertas.

$$V_2^0 = 4I = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \text{ volts.}$$

Para el cálculo de los parámetros $Z_{k,l}$ deberá pacificarse la red y excitar las terminales correspondientes de acuerdo con las condiciones impuestas.

Cálculo de Z_{11} y Z_{21} . El circuito correspondiente es:



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{(Z_{eq})I_1}{I_1} = \frac{(7-i)(1+i)}{7-i+i+1} = 1 + 0.75i$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

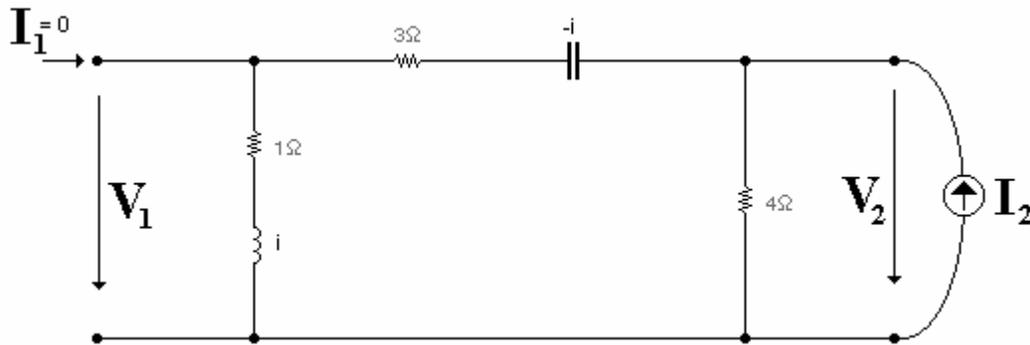
La corriente que circula por el resistor de 4Ω , por divisor de corriente es:

$$I_{4\Omega} = \frac{(1+i)I_1}{8}, \text{ por lo tanto}$$

$$V_2 = 4 \left[\frac{(1+i)I_1}{8} \right]$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{4 \left[\frac{(1+i)I_1}{8} \right]}{I_1} = \frac{1+i}{2} = 0.5 + 0.5i$$

Cálculo de Z_{12} y Z_{22} . El circuito correspondiente es:



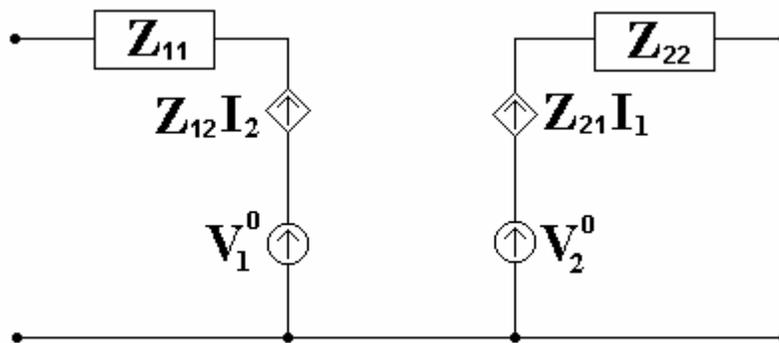
Puesto que se tiene un cuadripolo puramente pasivo (en su interior no existen fuentes de ningún tipo) se debe cumplir que $Z_{21} = Z_{12}$ (red recíproca).

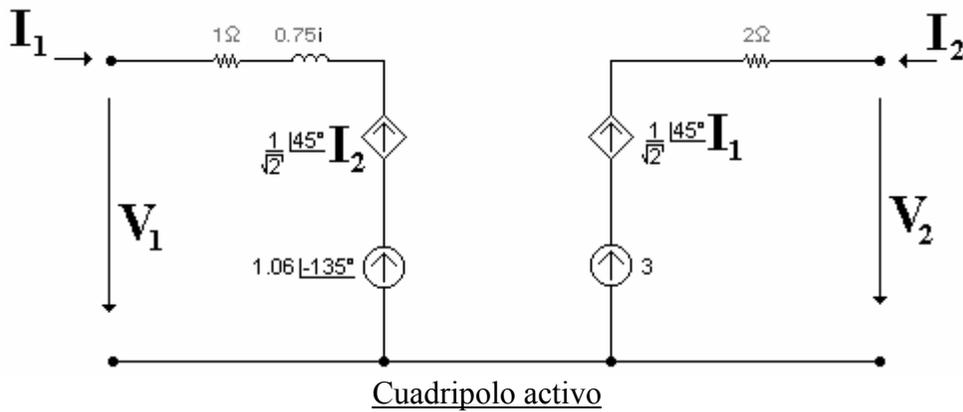
Comprobación

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{(1+i) \left[\frac{4I_2}{8} \right]}{I_2} = \frac{4+4i}{8} = 0.5 + 0.5i \quad \Omega$$

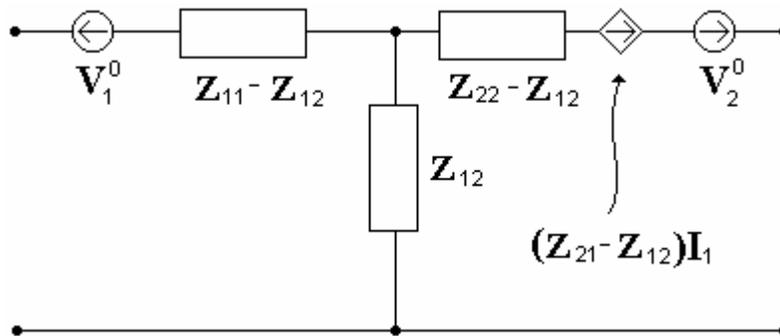
$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{(Z'_{eq}) I_2}{I_2} = \frac{4(3+1)}{8} = 2 \quad \Omega$$

La representación de la red mediante su circuito equivalente en V es:





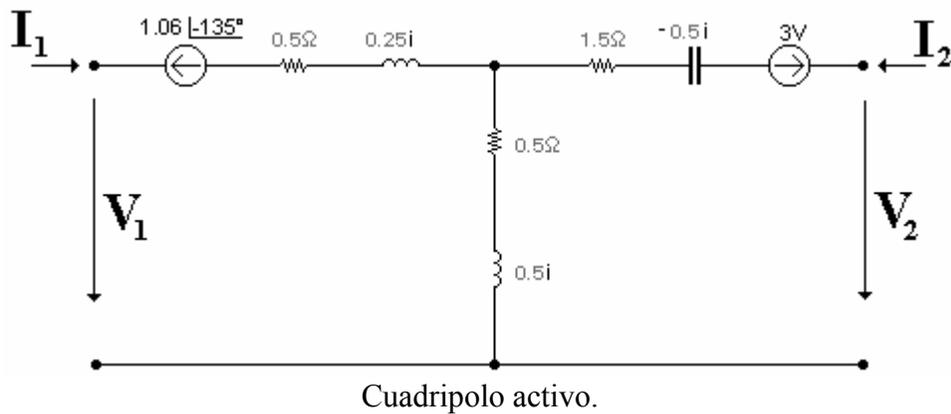
La representación de la red mediante su circuito equivalente en T es:



En donde:

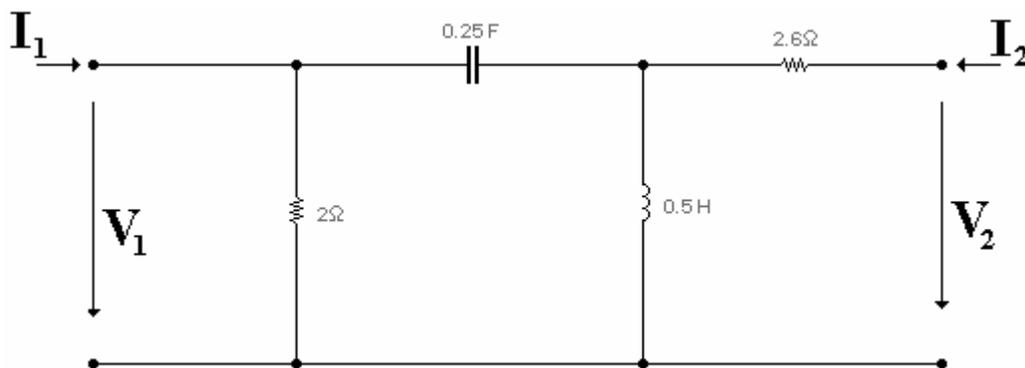
$$Z_{11} - Z_{12} = 1 + 0.75i - 0.5 - 0.5i = 0.5 + 0.25i \quad \Omega$$

$$Z_{22} - Z_{12} = 2 - 0.5 - 0.5i = 1.5 - 0.5i \quad \Omega$$



PROBLEMA 3

Calcule los parámetros Z de la siguiente red y obtenga la representación de su circuito equivalente en V , a la frecuencia $\omega=2 \text{ rad/seg}$.

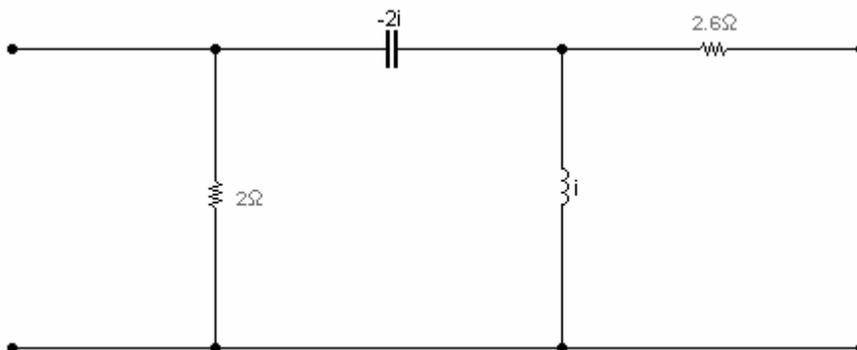


Solución:

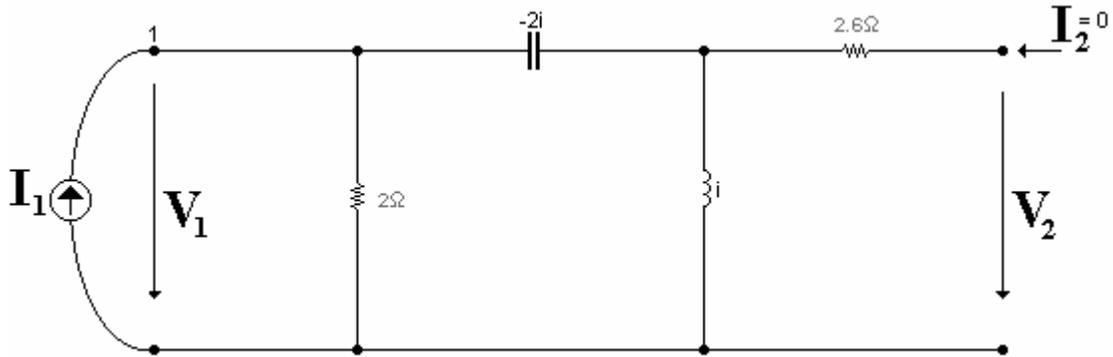
$$Z_C = \frac{s}{i\omega} = \frac{4}{2i} = -2i \ \Omega$$

$$Z_L = i\omega L = i(2)\left(\frac{1}{2}\right) = i \ \Omega$$

El circuito transformado es:



Cálculo de Z_{11} y Z_{21} . La red correspondiente es:

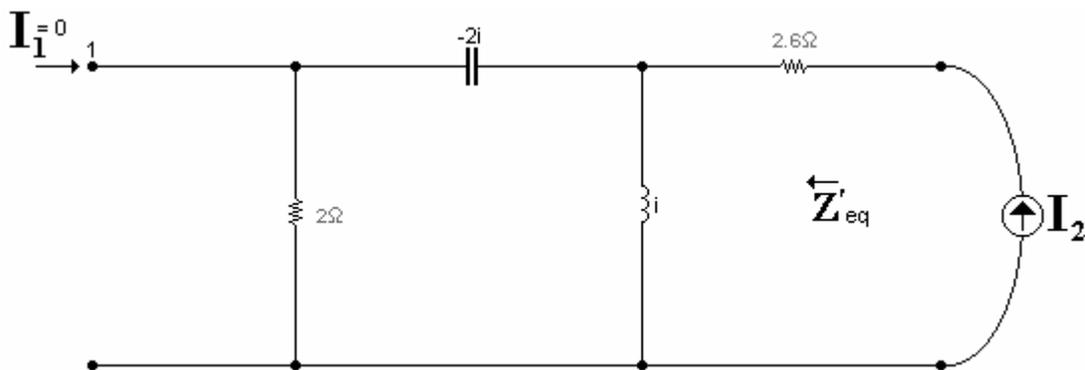


$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1 Z_{eq}}{I_1} = \frac{2(-i)}{2-i} = \frac{-2i(2+i)}{5} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i = 0.4 - 0.8i \ \Omega$$

Con el mismo circuito calculamos Z_{21} , aplicando divisor de corriente para obtener V_2 .

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{i \left[\frac{2I_1}{2-i} \right]}{I_1} = \frac{2i}{2-i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = -0.4 + 0.8i = 0.894 \angle 116.5^\circ \ \Omega$$

Cálculo de Z_{12} y Z_{22} . El circuito correspondiente es:



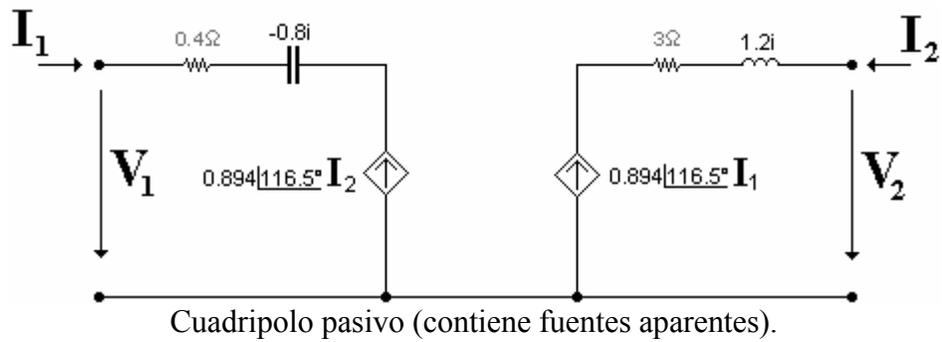
Al tener una red puramente pasiva $Z_{12} = Z_{21}$.

$$Z_{12} = -0.4 + 0.8i \quad \Omega$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{(Z'_{eq})I_2}{I_2} = 2.6 + \frac{(2-2i)i}{2-2i+i} = 2.6 + \frac{2+6i}{5}$$

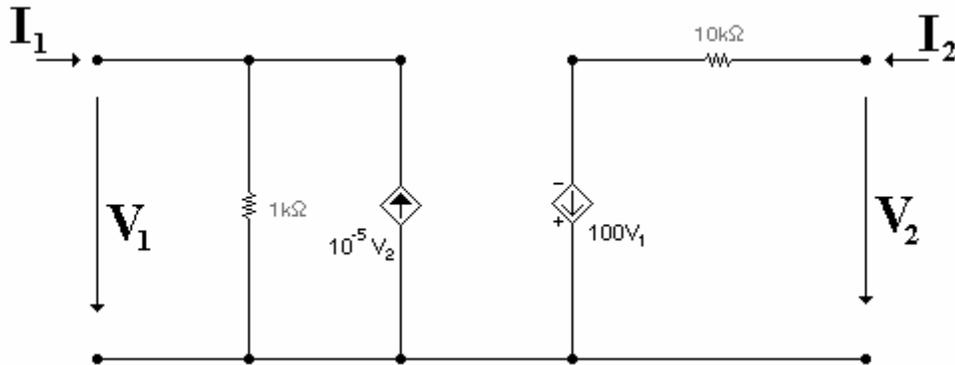
$$Z_{22} = 3 + 1.2i \quad \Omega$$

La representación de la red por su circuito equivalente en V es:



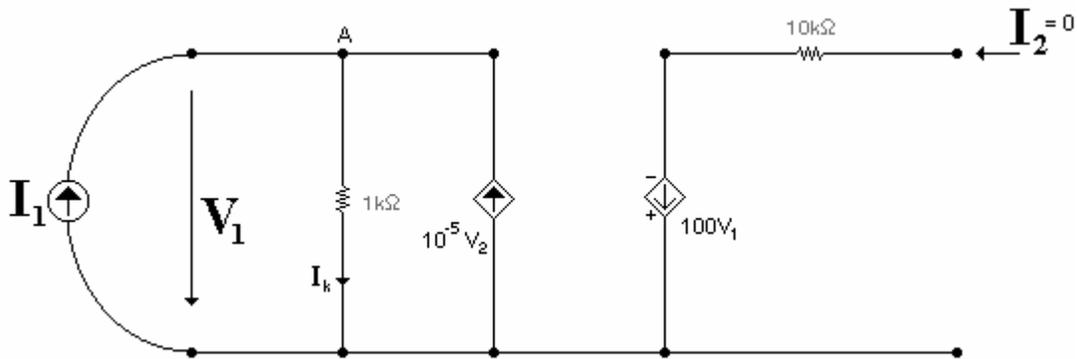
PROBLEMA 4

Calcule los parámetros Z de la red mostrada.



Solución:

Cálculo de Z_{11} . El circuito correspondiente es:



Aplicando la ley de Kirchhoff de corrientes (L. K. I.) al nodo A se cumple que:

$$-I_1 + I_k - I_{fc} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Además se observa que $V_2 = -100V_1$ ya que $I_2 = 0$.

Por lo tanto $I_{fc} = 10^{-5} V_2 = 10^{-5} (-100V_1)$.

Sustituyendo I_{fc} en (1).

$$-I_1 + I_k - 10^{-5}(-100V_1) = 0$$

$$\therefore I_k = I_1 - 10^{-5}(100V_1) = I_1 - 10^{-3}V_1$$

Por ley de ohm se tiene que:

$$V_1 = 10^3 I_k = 10^3(I_1 - 10^{-3}V_1) = 10^3 I_1 - V_1$$

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{10^3 I_1 - V_1}{I_1} = 10^3 - \frac{V_1}{I_1} = 10^3 - Z_{11}$$

$$2Z_{11} = 10^3$$

$$Z_{11} = \frac{10^3}{2} = 500\Omega$$

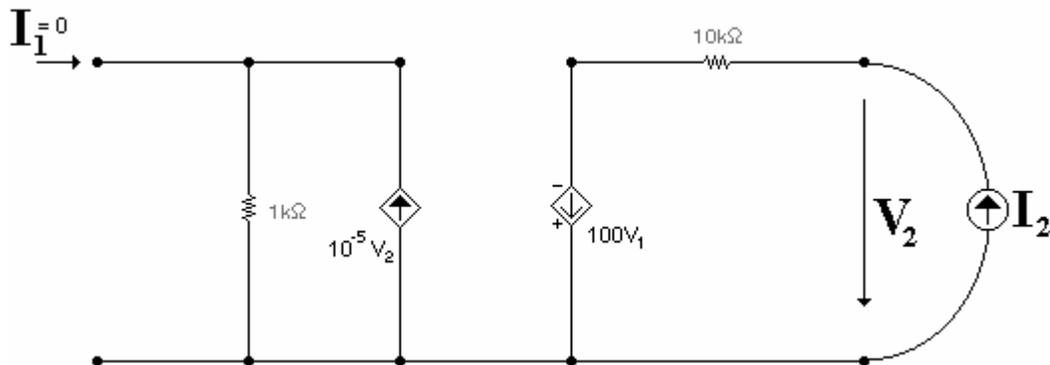
Cálculo de Z_{21}

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{-100V_1}{I_1} = \frac{-100[10^3 I_1 - V_1]}{I_1} = \frac{-10^5 I_1 + 100V_1}{I_1} = -10^5 + 100 \frac{V_1}{I_1}$$

$$Z_{21} = -10^5 + 100 Z_{11}$$

$$Z_{21} = -10^5 + 100(500) = -10^5 + 5 \times 10^4 = -50000 \Omega$$

Cálculo de Z_{12} . En la red que estamos analizando existen fuentes aparentes por lo que la red no es recíproca, es decir Z_{12} es diferente de Z_{21} y habrá que calcular Z_{12} mediante el siguiente circuito.



$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{(10^{-5} V_2)(10^3)}{I_2} = 10^{-2} \frac{V_2}{I_2}$$

pero $V_2 = 10^4 I_2 - 100 V_1$

$$Z_{12} = \frac{10^{-2}(10^4 I_2 - 100 V_1)}{I_2} = 10^2 - \frac{V_1}{I_2}$$

$$Z_{12} = 10^2 - Z_{12}$$

$$2 Z_{12} = 10^2$$

$$\therefore Z_{12} = 50 \Omega$$

Cálculo de Z_{22}

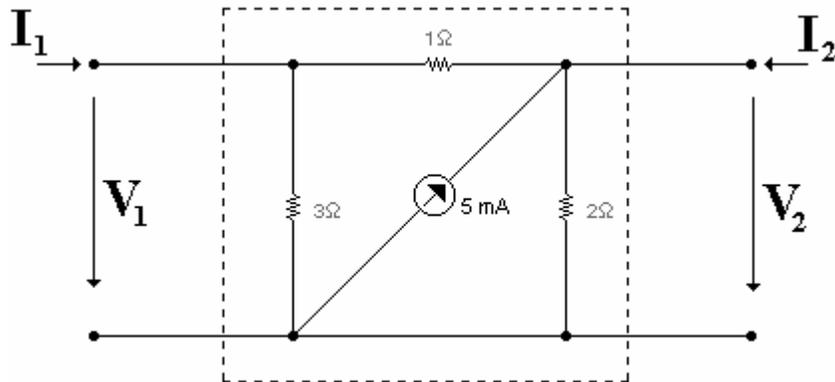
$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{10^4 I_2 - 100 V_1}{I_2} = \frac{10^4 I_2 - 100(10^{-2} V_2)}{I_2} = 10^4 - \frac{V_2}{I_2} = 10^4 - Z_{22}$$

$$2 Z_{22} = 10^4$$

$$Z_{22} = 5000 \Omega$$

PROBLEMA 5

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de corto circuito.



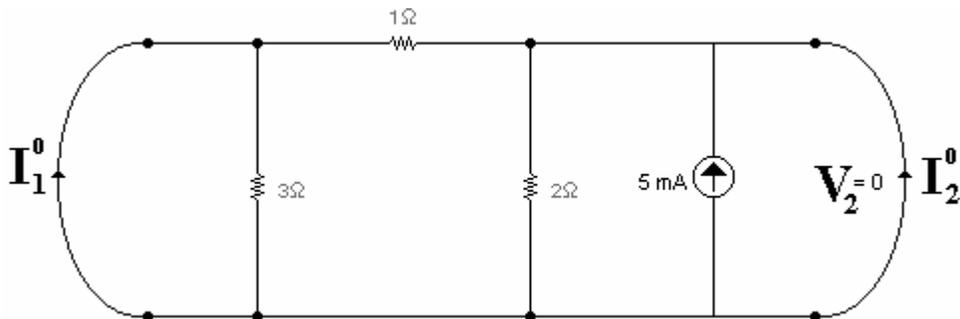
Solución:

Los parámetros de corto circuito son los parámetros Y . Las ecuaciones con estos parámetros para una red activa son:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + I_1^0$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + I_2^0$$

Calculemos primeramente I_1^0 e I_2^0 que son las corrientes debidas a la fuente interna con las terminales del cuadripolo en corto circuito, como se muestra:



Obteniéndose:

$$I_1^0 = 0 \text{ amp.}$$

$$I_2^0 = -5 \times 10^{-3} \text{ amp.}$$

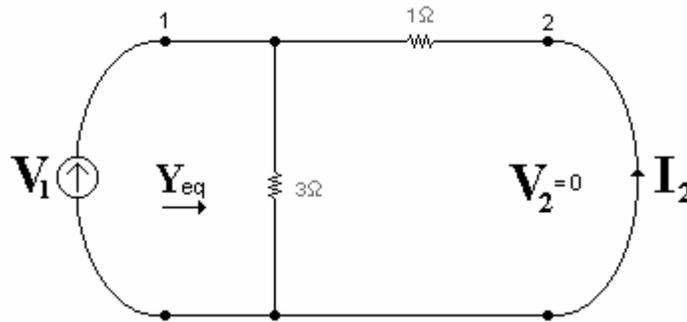
Para calcular los parámetros $Y_{k,l}$ debemos pacificar la red (anular fuentes reales), a la vez que cortocircuitar las terminales del puerto correspondiente y excitar con una fuente real el otro puerto, según las condiciones requeridas.

Cálculo de Y_{11} y Y_{21}

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \rightarrow \text{Admitancia de entrada [mhos].}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \rightarrow \text{Admitancia de transferencia directa [mhos].}$$

En ambos parámetros se tiene la condición de que $V_2 = 0$, por lo que el circuito resultante es:



$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{Y_{eq}(V_1)}{V_1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \text{ mhos}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{(-1)V_1}{V_1} = -1 \text{ mhos}$$

Cálculo de Y_{12} y Y_{22}

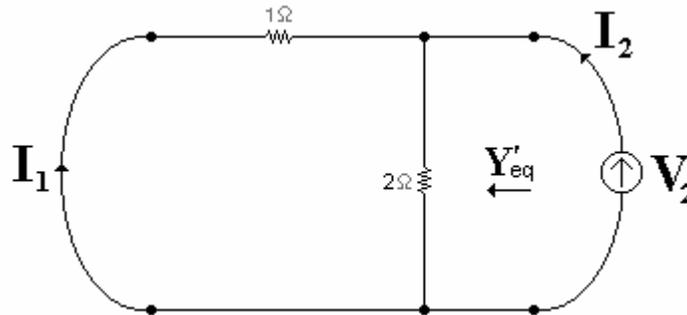
$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \rightarrow \text{Admitancia de transferencia inversa [mhos]}.$$

236

Problemario de Circuitos Eléctricos II

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \rightarrow \text{Admitancia de salida [mhos]}.$$

Con la condición de $V_1 = 0$, obtenemos:



$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{(-1)(V_2)}{V_2} = -1 \text{ mhos}$$

Cumplíndose que en una red puramente pasiva (no contiene en su interior fuentes de ningún tipo) $Y_{12} = Y_{21}$.

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{Y'_{eq} V_2}{V_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ mhos}$$

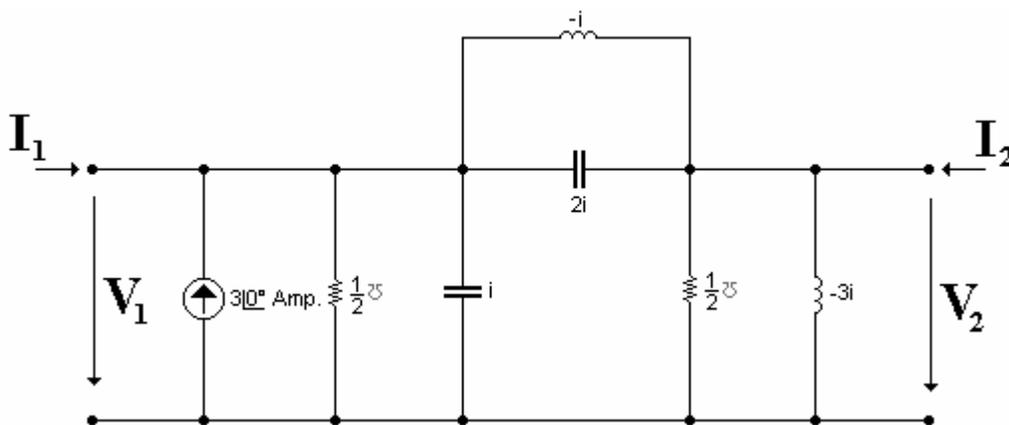
Con lo resultados obtenidos, las ecuaciones que caracterizan a la red son:

$$I_1 = \frac{4}{3}V_1 + (-1)V_2$$

$$I_2 = (-1)V_1 + 1.5V_2 - 5 \times 10^{-3}$$

PROBLEMA 6

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de corto circuito y obtenga sus circuitos equivalentes en V y en π .



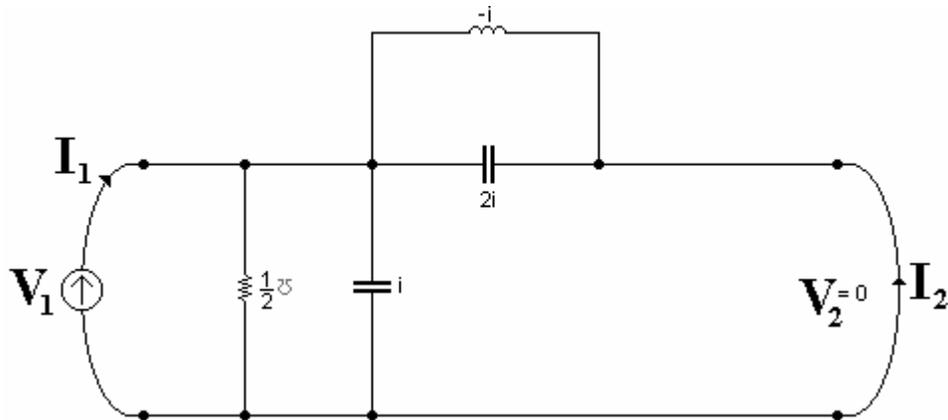
Solución:

Al cortocircuitar las terminales de los dos puertos de la red dada obtenemos:

$$I_1^0 = -3\angle 0^\circ \text{ amp.}$$

$$I_2^0 = 0 \text{ amp.}$$

Cálculo de Y_{11} y Y_{21} . Al pacificar la red dada, cortocircuitar el puerto de salida y excitar el puerto de entrada obtenemos:

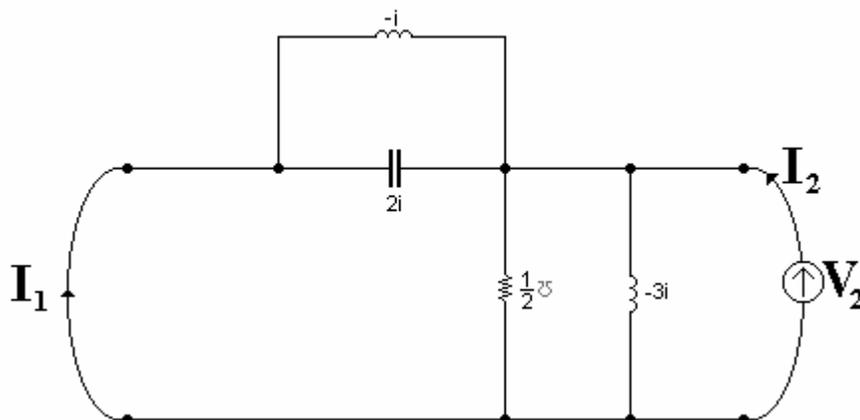


$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i + 2i - i\right)V_1}{V_1} = \frac{1}{2} + 2i$$

$$Y_{11} = 0.5 + 2i \text{ mhos}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{-(-i + 2i)V_1}{V_1} = -i \text{ mhos}$$

Cálculo de Y_{12} y Y_{22} . Para el cálculo de estos parámetros cortocircuitamos el puerto de entrada y excitamos con una fuente de voltaje el puerto de salida. La red resultante es:

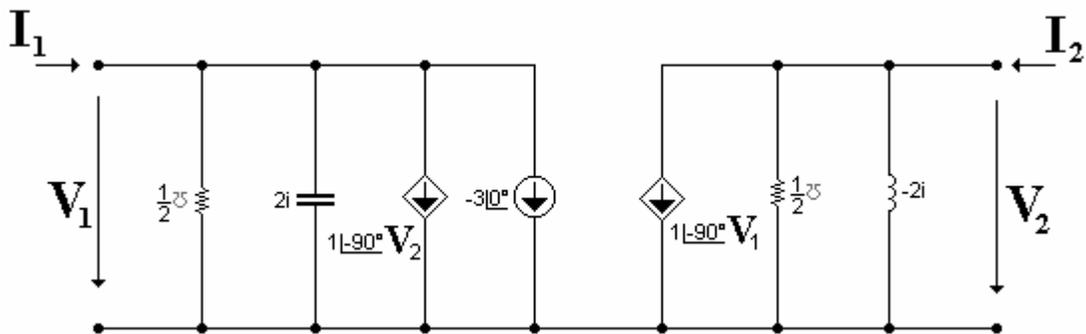
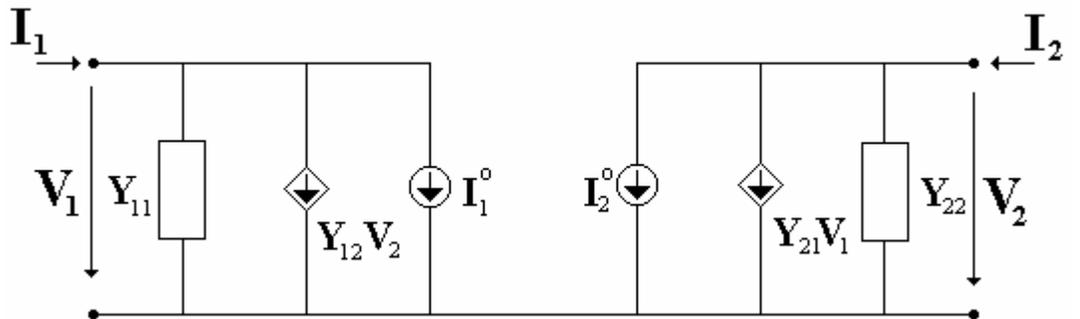


$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-(-i+2i)V_2}{V_2} = -i$$

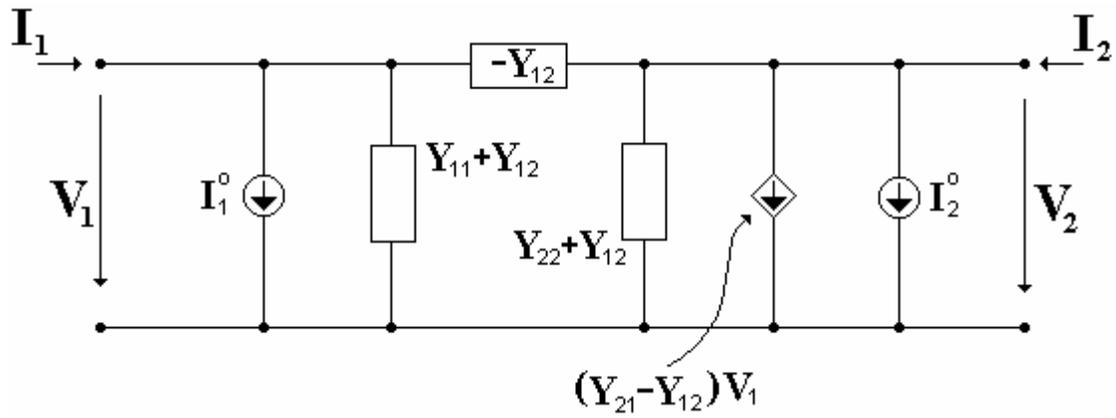
En una red recíproca este parámetro no es necesario calcularlo, ya que es igual a Y_{21} .

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = -3i + \frac{1}{2} + 2i - i = \frac{1}{2} - 2i \text{ mhos}$$

Representación de la red en V

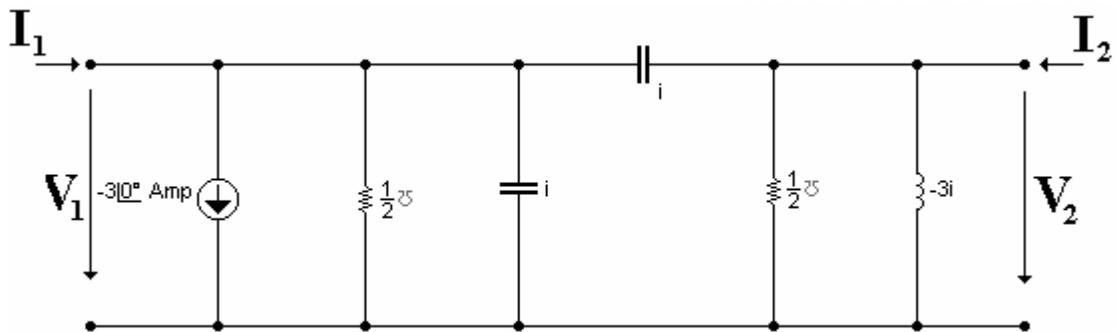


Representación en π



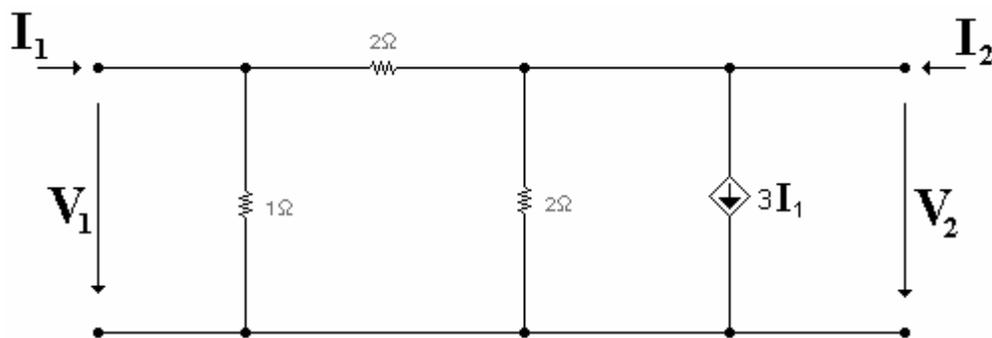
$$Y_{11} + Y_{12} = \frac{1}{2} + 2i - i = \frac{1}{2} + i$$

$$Y_{22} + Y_{12} = \frac{1}{2} - 2i - i = \frac{1}{2} - 3i$$



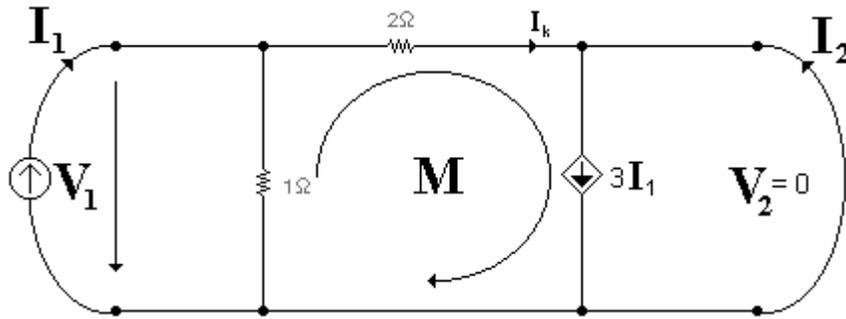
PROBLEMA 7

En la red mostrada, que contiene una fuente de corriente controlada por corriente, calcule los parámetros de corto circuito.



Solución:

Cálculo de Y_{11} y Y_{21} . Con la condición $V_2 = 0$ el circuito resultante es:



$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)V_1}{V_1} = \frac{3}{2} \text{ mhos}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Las siguientes consideraciones permitirán calcular I_2 .

Al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes (L. K. I.) al nodo A:

$$-I_2 + 3I_1 - I_k = 0 \dots\dots\dots(1)$$

Para calcular I_k aplicamos la ley de Kirchhoff para voltajes (L. K. V.) a la malla M :

$$-V_1 + 2I_k + V_2 = 0 \quad (V_2 = 0)$$

$$\therefore I_k = \frac{V_1}{2}$$

Sustituyendo I_k en (1):

$$-I_2 + 3I_1 - \frac{V_1}{2} = 0$$

$$I_2 = 3I_1 - \frac{V_1}{2}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{3I_1 - \frac{V_1}{2}}{V_1} = 3 \frac{I_1}{V_1} - \frac{1}{2}$$

Con la misma condición ($V_2 = 0$) sabemos que:

$$\frac{I_1}{V_1} = Y_{11} = \frac{3}{2} \text{ mhos, así que:}$$

$$Y_{21} = 3\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$$

$$Y_{21} = 4 \text{ mhos}$$

También se pudo haber obtenido I_k por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{(1)I_1}{1+2} = \frac{I_1}{3}$$

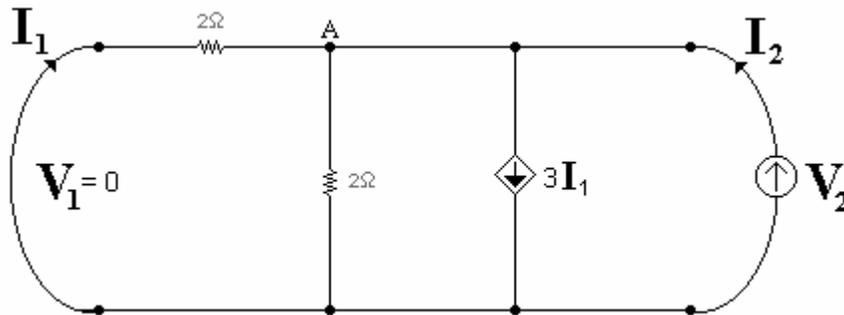
Sustituyendo en (1):

$$-I_2 + 3I_1 - \frac{I_1}{3} = 0$$

$$I_2 = 3I_1 - \frac{I_1}{3} = I_1\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{I_1\left(\frac{8}{3}\right)}{V_1} = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \text{ mhos}$$

Cálculo de Y_{12} y Y_{22} . En la red dada se tiene una fuente aparente, por lo que la red no es recíproca y habrá que calcular Y_{12} . Al aplicar la condición $V_1=0$ el circuito resultante es:



$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)V_2}{V_2} = -\frac{1}{2} \text{ mhos}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

Las siguientes consideraciones permitirán calcular I_2 .

$$I_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)V_2$$

Aplicando la ley de Kirchhoff para corrientes (L. K. I.) al nodo A de la figura, resulta:

$$-I_1 + \frac{V_2}{2} + 3I_1 - I_2 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

Sustituyendo I_1 en (1):

$$\frac{1}{2}V_2 + \frac{V_2}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}V_2\right) - I_2 = 0$$

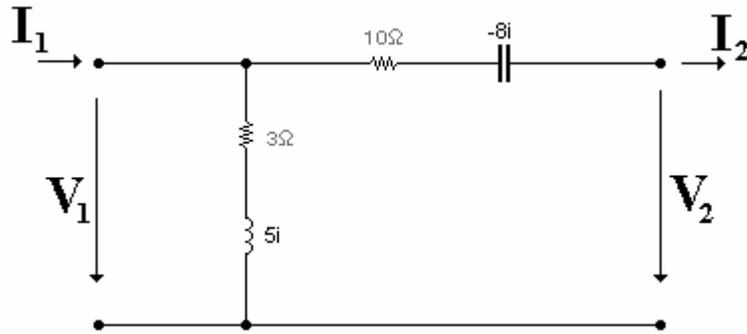
$$\therefore I_2 = V_2 - \frac{3}{2}V_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}V_2$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-\frac{1}{2}V_2}{V_2} = -\frac{1}{2} \text{ mhos}$$

PROBLEMA 8

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de transmisión directos:



Solución:

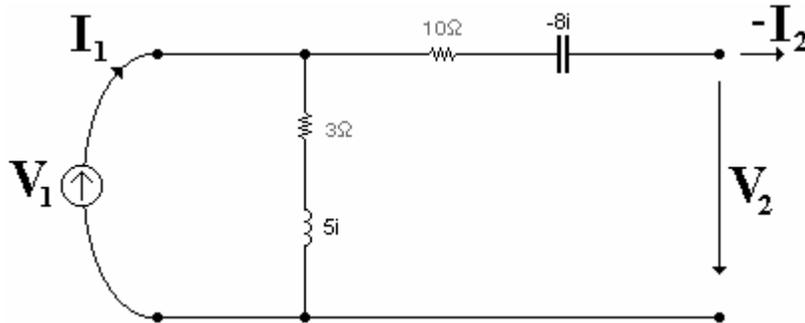
Las ecuaciones que caracterizan a la red dada, con parámetros de transmisión directos A , B , C y D son:

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + B(-I_2) \\ I_1 &= CV_2 + D(-I_2) \end{aligned}$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} \rightarrow \text{Relación de voltaje de entrada a voltaje de salida, con salida abierta [sin unidades]}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} \rightarrow \text{Admitancia de transferencia inversa, con salida abierta [mhos]}$$

Cálculo de A y C . La siguiente configuración permite calcular A y C .

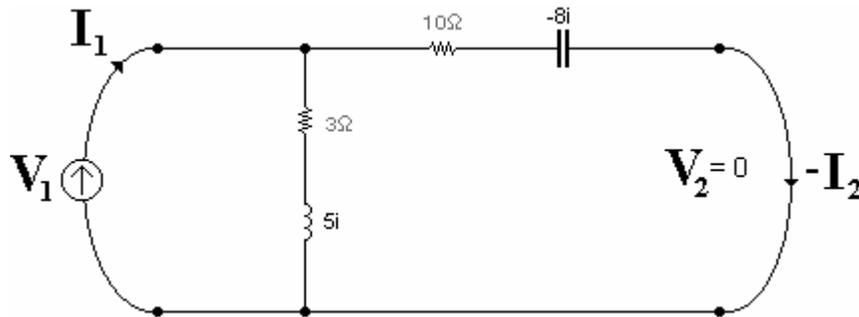


$$V_1 = (3 + 5i) I_1 = V_2$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} = 1$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} = \frac{I_1}{(3 + 5i) I_1} = \frac{1}{3 + 5i} = \frac{3 - 5i}{34} \text{ mhos}$$

Cálculo de B y D . La siguiente configuración permite calcular B y D .



$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \rightarrow \text{Impedancia de transferencia inversa, con salida en corto circuito } [\Omega].$$

$$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \rightarrow \text{Relación de corriente de entrada a corriente de salida, con salida en corto circuito [sin unidades].}$$

Por divisor de corriente:

$$-I_2 = \frac{3 + 5i}{13 - 3i} I_1$$

$$V_1 = \frac{(10 - 8i)(3 + 5i)}{13 - 3i} I_1$$

$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{(10 - 8i)(3 + 5i)}{13 - 3i} I_1}{\frac{3 + 5i}{13 - 3i} I_1} = 10 - 8i \text{ } \Omega$$

$$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{I_1}{\frac{3 + 5i}{13 - 3i} I_1} = \frac{13 - 3i}{3 + 5i} = \frac{24 - 74i}{34}$$

Como la red es puramente pasiva (en su interior no contiene fuentes de ningún tipo) se debe cumplir que $AD - BC = 1$, pudiéndose obtener también el parámetro D de la ecuación anterior.

$$D = \frac{1+BC}{A} = 1+BC$$

$$D = 1 + (10 - 8i) \left(\frac{1}{3 + 5i} \right) = \frac{13 - 3i}{3 + 5i}$$

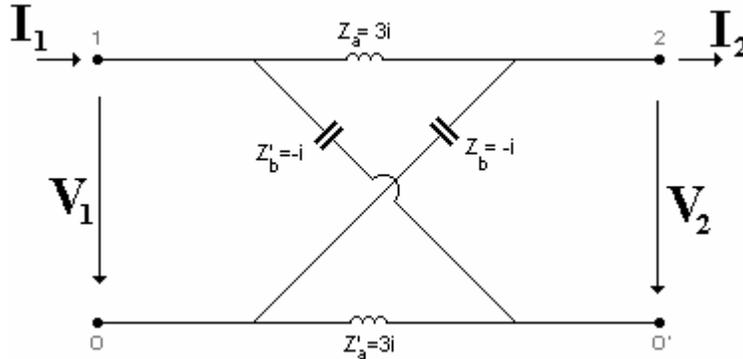
Finalmente, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 - 8i \\ \frac{3 - 5i}{34} & \frac{24 - 74i}{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

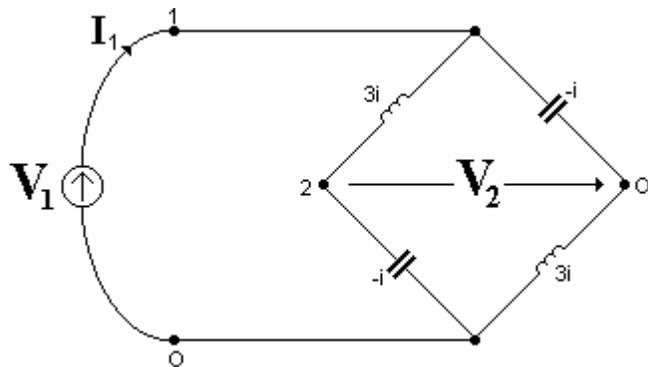
PROBLEMA 9

En la red de celosía simétrica dada, calcule los parámetros de transmisión directos.



Solución:

Para una más clara visualización de esta red, ubiquemos sus nodos nuevamente, conectando los elementos que existen entre dichos nodos y obtener la siguiente configuración:



Se observa que las ramas tienen impedancias iguales.

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}$$

$$V_1 = \frac{(3i-i)(3i-i)}{4i} I_1 = -\frac{4}{4i} I_1 = i I_1$$

La corriente que circula por cada rama es $\frac{1}{2} I_1$ por ser impedancias iguales, pudiéndose aplicar la ley de Kirchhoff para voltajes en el triángulo superior de la figura:

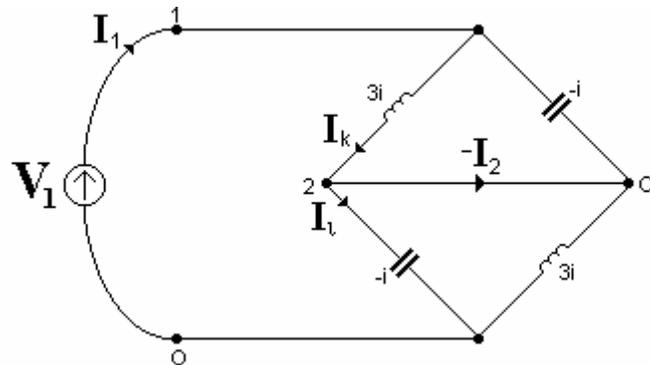
$$3i \frac{1}{2} I_1 + V_2 - (-i) \frac{1}{2} I_1 = 0$$

$$\therefore V_2 = -\frac{3i}{2} I_1 - \frac{1}{2} i I_1 = -2i I_1$$

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{i I_1}{-2i I_1} = -\frac{1}{2}$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{-2i I_1} = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2} i \text{ mhos.}$$

Cálculo de B y D. La siguiente configuración permite calcular B y D (se cortocircuitan las terminales 2 y O').



Al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes al nodo 2:

$$-I_k + I_l - I_2 = 0$$

$$-I_2 = I_k - I_l \dots \dots \dots (1)$$

En la figura se observa que las impedancias del triángulo superior están en paralelo y son del mismo valor que las del triángulo inferior, por lo que:

$$I_k = \frac{V_1}{3i}$$

e

$$I_l = \frac{V_1}{-i}$$

Sustituyendo I_k e I_l en (1):

$$-I_2 = \frac{V_1}{6i} - \frac{V_1}{-2i} = -\frac{1}{6}iV_1 - \frac{1}{2}iV_1 = -\frac{2}{3}iV_1$$

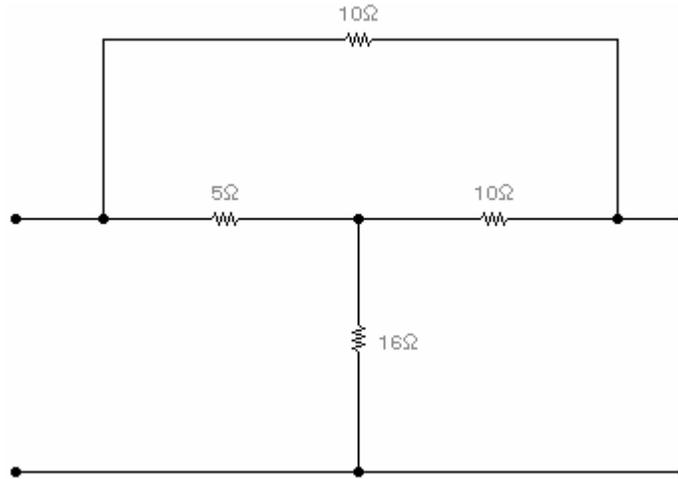
$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{V_1}{-\frac{2}{3}iV_1} = \frac{3}{2}i$$

$$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{V_1}{Z_T}}{-I_2} = \frac{\frac{V_1}{-3i}}{-\frac{2}{3}iV_1} = \frac{3V_1}{-6V_1} = -\frac{1}{2}$$

Se cumple que $AD - BC = 1$ por ser la red recíproca y también que $A = D$ por ser simétrica.

PROBLEMA 10

En la red dada calcule los parámetros de transmisión inversos.



Solución:

Las ecuaciones que caracterizan a la red dada, con parámetros de transmisión inversos A' , B' , C' y D' son:

$$\begin{aligned}V_2 &= A'V_1 + B'(-I_1) \\ I_2 &= C'V_1 + D'(-I_1)\end{aligned}$$

donde

$$A' = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} \rightarrow \text{Ganancia en voltaje, con entrada abierta [sin unidades].}$$

$$C' = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} \rightarrow \text{Admitancia de transferencia directa, con entrada abierta [mhos].}$$

Cálculo de A' y C' . Con la condición $-I_1=0$ se obtiene el siguiente circuito:

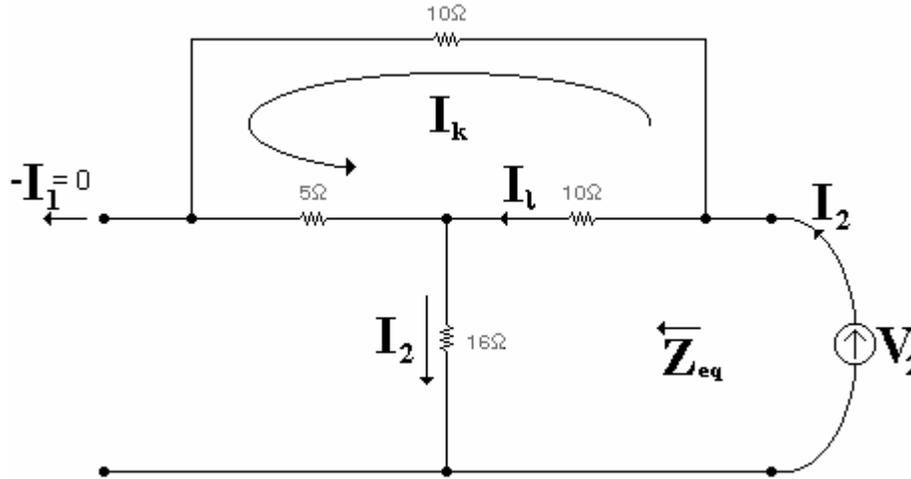


Figura 1

Se observa que el resistor de 5Ω está en serie con el de 10Ω de la rama superior, quedando en paralelo un resistor de 15Ω con otro de 10Ω .

$$V_2 = Z_{eq} I_2$$

$$V_2 = \left(\frac{15 \times 10}{15 + 10} + 16 \right) I_2$$

$$V_1 = 5I_k + 16I_2$$

Para calcular I_k observamos que el resistor de 15Ω (resultante de la suma en serie de 5Ω y de 10Ω) está en paralelo con el otro resistor de 10Ω y la corriente de entrada es I_2 .

Por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{10}{25} I_2$$

$$A' = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} = \frac{(6+16) I_2}{5 \left(\frac{10}{25} I_2 \right) + 16 I_2} = \frac{22 I_2}{2 I_2 + 16 I_2} = \frac{22}{18}$$

$$C' = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} = \frac{I_2}{5 I_k + 16 I_2} = \frac{I_2}{(2+16) I_2} = \frac{1}{18} \text{ mhos}$$

Cálculo de B' y D' .-

$$B' = \left. \frac{V_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} \rightarrow \text{Impedancia de transferencia directa, con entrada en corto circuito } [\Omega].$$

$$D' = \left. \frac{I_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} \rightarrow \text{Ganancia en corriente, con entrada en corto circuito [sin unidades].}$$

La red correspondiente es:

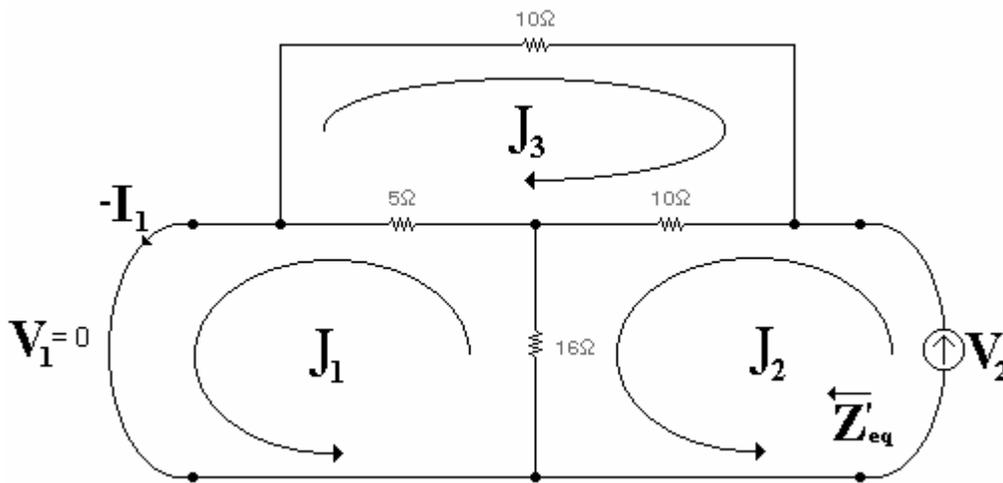


Figura 2

$$-I_1 = J_1.$$

Calculando J_1 por el método de mallas:

$$Z_{11} = 21$$

$$Z_{22} = 26$$

$$Z_{33} = 25$$

$$Z_{12} = -16$$

$$Z_{13} = 5$$

$$Z_{23} = 10$$

$$J_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -16 & 5 \\ V_2 & 26 & 10 \\ 0 & 10 & 25 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 21 & -16 & 5 \\ -16 & 26 & 10 \\ 5 & 10 & 25 \end{bmatrix}} = \frac{450V_2}{2900}$$

$$B' = \left. \frac{V_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} = \frac{V_2}{\frac{45V_2}{290}} = \frac{290}{45}$$

$$D' = \left. \frac{I_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} = \frac{I_2}{\frac{45}{290}V_2}$$

$$V_2 = Z'_{eq} I_2$$

En la figura 2 se observa que el resistor de 16Ω está en paralelo con el de 5Ω , por lo que al reducir la red se obtiene una $Z'_{eq} = \frac{29}{5}$

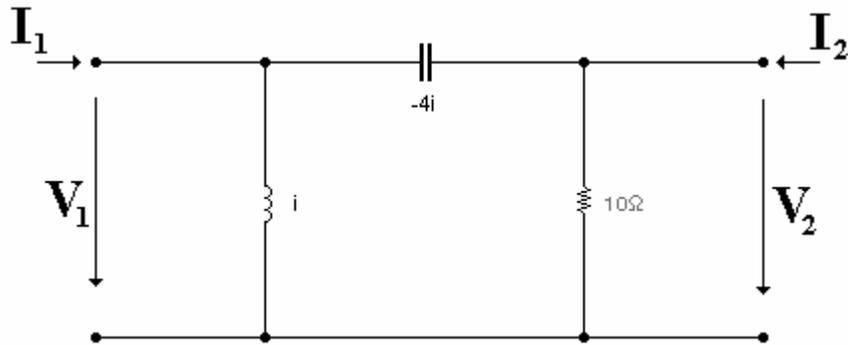
$$\text{Así, } V_2 = \frac{29}{5} I_2$$

$$D' = \left. \frac{I_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} = \frac{I_2}{\frac{45}{290}V_2} = \frac{I_2}{\frac{45}{290}\left(\frac{29}{5}\right)I_2} = \frac{10}{9}$$

Se cumple que $A'D' - B'C' = 1$.

PROBLEMA 11

Calcule los parámetros híbridos directos de la red mostrada y obtenga su circuito equivalente.



Solución:

Los parámetros híbridos directos son los parámetros h . Las ecuaciones con estos parámetros para la red dada son:

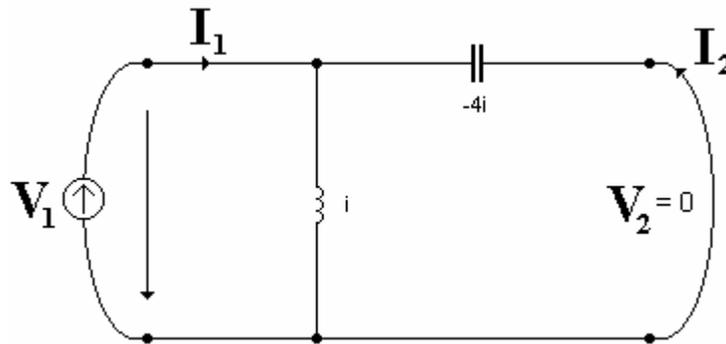
$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned}$$

Cálculo de h_{11} y h_{21}

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \rightarrow \text{Impedancia de entrada, con salida en corto circuito } [\Omega].$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \rightarrow \text{Ganancia en corriente o factor de amplificación } (\alpha_{21}), \text{ con salida en corto circuito [sin unidades].}$$

Con la condición $V_2 = 0$ la red correspondiente es:



$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{V_1}{YV_1}$$

$$Y = \frac{1}{i} - \frac{1}{4i} = -\frac{3}{4}i$$

$$h_{11} = \frac{V_1}{-\frac{3}{4}iV_1} = -\frac{4}{3i} = \frac{4i}{3} \Omega$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Por divisor de corriente calculamos I_2 :

$$I_2 = -\frac{iI_1}{-4i+i} = \frac{1}{3}I_1$$

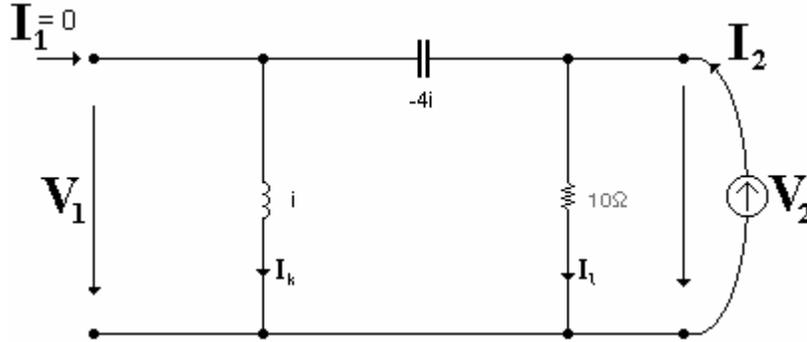
$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{3}I_1}{I_1} = \frac{1}{3}$$

Cálculo de h_{12} y h_{22}

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \rightarrow \text{Relación inversa de la ganancia en voltaje, con entrada abierta [sin unidades].}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \rightarrow \text{Admitancia de salida, con entrada abierta [mhos].}$$

Con la condición $I_1 = 0$ se tiene el siguiente circuito:



$$V_1 = i I_k = i \left(\frac{10 I_2}{i - 4i + 10} \right) = \frac{10i I_2}{-3i + 10}$$

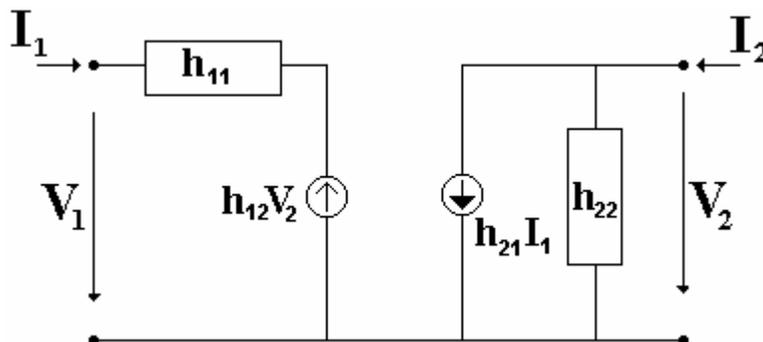
$$V_2 = 10 I_l = 10 \left(\frac{-3i I_2}{i - 4i + 10} \right) = \frac{-30i I_2}{-3i + 10}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{\frac{10i I_2}{-3i + 10}}{\frac{-30i I_2}{-3i + 10}} = \frac{10i I_2}{-30i I_2} = -\frac{1}{3}$$

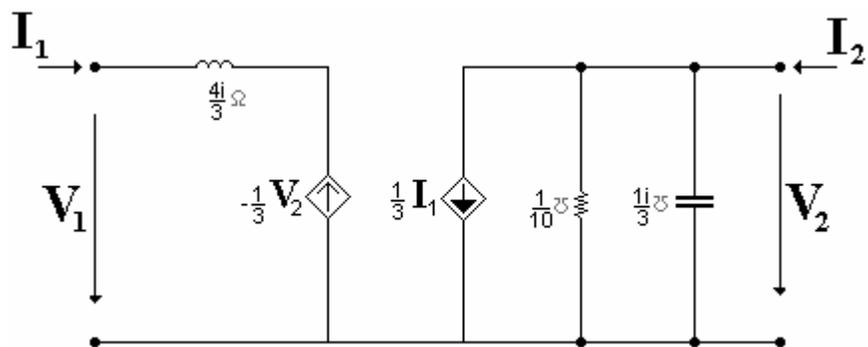
$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{I_2}{\frac{-30i I_2}{-3i + 10}} = \frac{-3i + 10}{-30i} = \frac{90 + 300i}{900}$$

$$h_{22} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3}i \text{ mhos.}$$

Se observa que por tener una red puramente pasiva (recíproca) $h_{12} = -h_{21}$. El circuito equivalente viene a ser:

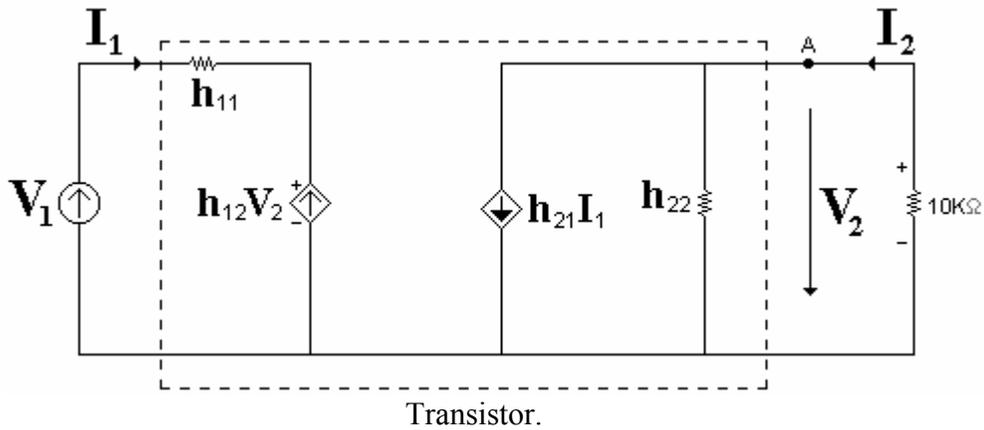


Al sustituir valores de parámetros, obtenemos:



PROBLEMA 12

En el circuito equivalente de un transistor con parámetros híbridos directos que se muestra, determine la ganancia en corriente $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$, la ganancia en voltaje $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ y la impedancia de entrada (Z_{ent}).



Valores típicos son:

$$h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$$

$$h_{12} = 3 \times 10^{-4}$$

$$h_{21} = 50$$

$$h_{22} = 25 \mu\text{mhos}$$

Solución:

Cálculo de la ganancia en corriente. Al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes al nodo A:

$$h_{21}I_1 + h_{22}V_2 - I_2 = 0$$

$$\therefore I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \dots\dots\dots(1)$$

pero $V_2 = -10 \times 10^3 I_2$

Sustituyendo valores en (1):

$$I_2 = 50 I_1 + 25 \times 10^{-6} (-10 \times 10^3 I_2) = 50 I_1 - 25 \times 10^{-2} I_2$$

$$I_2 (1 + 25 \times 10^{-2}) = 50 I_1$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{50}{1 + 25 \times 10^{-2}} = \frac{50}{1.25} = 40$$

Obsérvese que I_2 pudo obtenerse también directamente del circuito de salida por divisor de corriente:

$$I_2 = \frac{\left(\frac{1}{h_{22}}\right) h_{21} I_1}{\frac{1}{h_{22}} + Z_L} = \frac{h_{21} I_1}{1 + h_{22} Z_L}$$

y la ganancia en corriente queda como:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} Z_L} = 40$$

Cálculo de la ganancia en voltaje. Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla de entrada:

$$10^3 I_1 + h_{12} V_2 - V_1 = 0$$

$$\therefore I_1 = \frac{V_1 - h_{12} V_2}{10^3}$$

Sustituyendo I_1 en (1):

$$I_2 = h_{21} \left(\frac{V_1 - h_{12} V_2}{10^3} \right) + h_{22} V_2 \dots \dots \dots (2)$$

pero ya hemos establecido que

$$V_2 = -10 \times 10^3 I_2$$

$$\therefore I_2 = -\frac{V_2}{10^4}$$

Sustituyendo I_2 en (2):

$$-\frac{V_2}{10^4} = h_{21} \left(\frac{V_1 - h_{12} V_2}{10^3} \right) + h_{22} V_2$$

Al sustituir los valores de los parámetros h :

$$-\frac{V_2}{10^4} = 50 \left(\frac{V_1 - 3 \times 10^{-4} V_2}{10^3} \right) + 25 \times 10^{-6} V_2$$

$$-V_2 = 5 \times 10^2 V_1 - 15 \times 10^{-2} V_2 + 25 \times 10^{-2} V_2$$

$$-V_2 = 5 \times 10^2 V_1 + 10^{-1} V_2$$

$$V_2 (-1 - 10^{-1}) = 5 \times 10^2 V_1$$

$$V_2 (-1.1) = 5 \times 10^2 V_1$$

$$\therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{5 \times 10^2}{-1.1} = -454.54$$

Cálculo de la impedancia de entrada. Hemos obtenido al calcular la ganancia en voltaje que

$$I_1 = \frac{V_1 - h_{12} V_2}{10^3}$$

y también que $\frac{V_2}{V_1} = \frac{5 \times 10^2}{-1.1}$

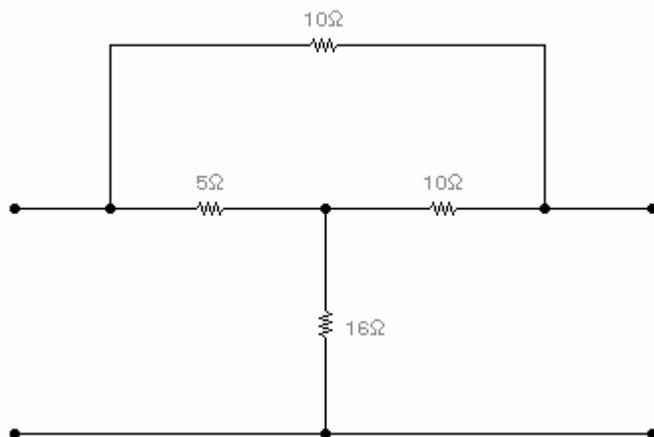
$\therefore V_2 = \frac{5 \times 10^2 V_1}{-1.1}$, así que sustituyendo este valor de V_2 en I_1 :

$$I_1 = \frac{V_1 - h_{12} \left(\frac{5 \times 10^2}{-1.1} V_1 \right)}{10^3} = \frac{V_1 \left(1 - h_{12} \frac{5 \times 10^2}{-1.1} \right)}{10^3}$$

$$Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{10^3}{1 + \frac{(3 \times 10^{-4})(5 \times 10^2)}{1.1}} = 880 \ \Omega$$

PROBLEMA 13

Calcule los parámetros híbridos inversos de la red dada y obtenga su circuito equivalente.



Solución:

Las ecuaciones que caracterizan a una red puramente pasiva con parámetros híbridos inversos o parámetros “g” son:

$$I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2$$

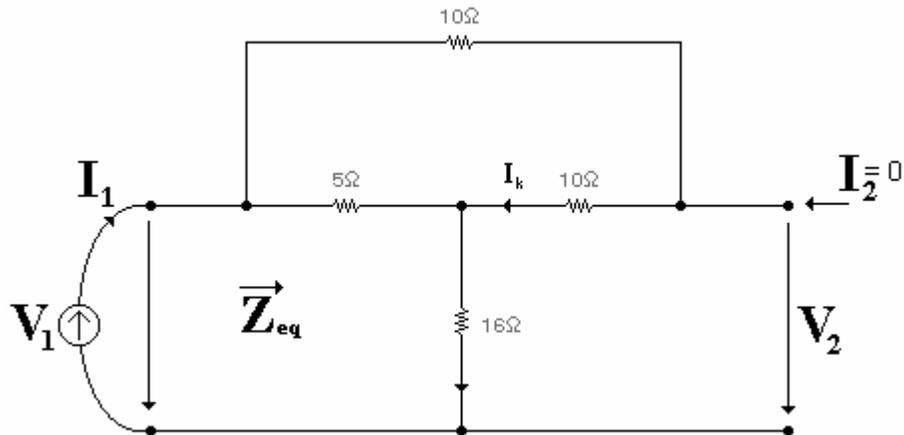
$$V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2$$

Cálculo de g_{11} y g_{21}

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \rightarrow \text{Admitancia de entrada, con salida abierta [mhos].}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \rightarrow \text{Ganancia en voltaje, con salida abierta [sin unidades].}$$

La siguiente configuración corresponde a la condición $I_2 = 0$.



$$Z_{eq} = 20 \parallel 5 + 16 = \frac{20 \times 5}{25} + 16 = 20$$

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{20 I_1} = \frac{1}{20} \text{ mhos}$$

$$V_2 = 10 I_k + 16 I_1$$

Por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{5 I_1}{5 + 20} = \frac{5}{25} I_1$$

$$V_2 = 10 \left(\frac{5}{25} I_1 \right) + 16 I_1 = 18 I_1$$

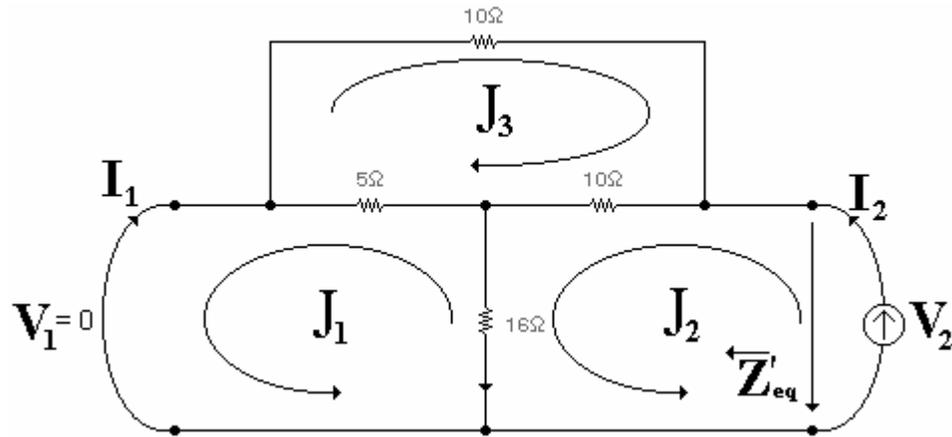
$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{18 I_1}{20 I_1} = \frac{9}{10}$$

Cálculo de g_{12} y g_{22}

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} \rightarrow \text{Ganancia en corriente, con entrada en corto [sin unidades].}$$

$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} \rightarrow \text{Impedancia de salida, con entrada en corto } [\Omega].$$

Con la condición $V_1 = 0$ se tiene el circuito siguiente:



$$I_1 = -J_1$$

Calculando J_1 por el método de mallas:

$$Z_{11} = 21$$

$$Z_{22} = 26$$

$$Z_{33} = 25$$

$$Z_{12} = -16$$

$$Z_{13} = 5$$

$$Z_{23} = 10$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -16 & 5 \\ V_2 & 26 & 10 \\ 0 & 10 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & -16 & 5 \\ -16 & 26 & 10 \\ 5 & 10 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{450V_2}{2900}$$

Por lo que $I_1 = \frac{-45}{290}V_2$

Para obtener I_2 calculamos Z'_{eq} :

$$Z'_{eq} = (16 \parallel 5 + 10) \parallel 10 = \frac{29}{5}$$

$$I_2 = \frac{5}{29} V_2$$

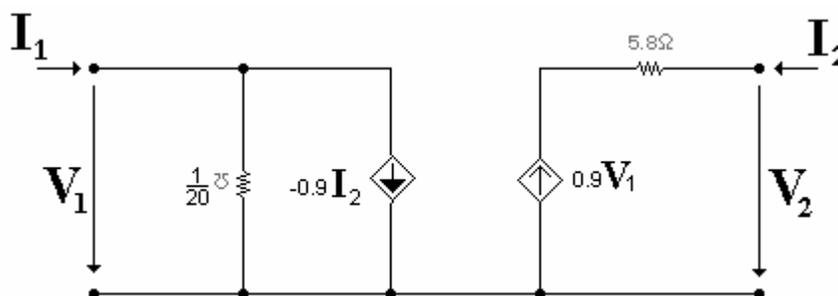
Sustituyendo en g_{12}

$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{-\frac{45}{290} V_2}{\frac{5}{29} V_2} = \frac{-45 \times 29}{5 \times 290} = -\frac{45}{50} = -\frac{9}{10}$$

$$g_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_1=0} = \frac{V_2}{\frac{5}{29} V_2} = \frac{29}{5} \Omega$$

Se cumple que $g_{21} = -g_{12}$ (red puramente pasiva).

El circuito equivalente de la red dada es:



Red pasiva (contiene fuentes aparentes).

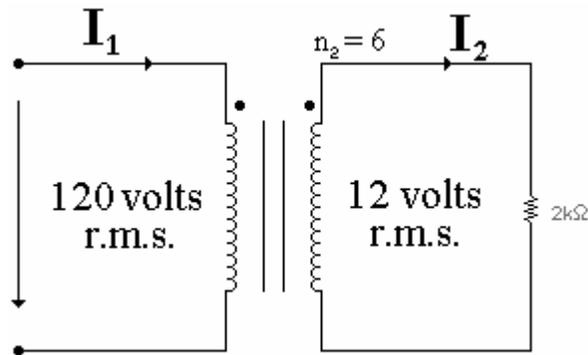
Las ecuaciones en su forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -0.9 \\ 0.9 & 5.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 14

En el circuito mostrado, que contiene un transformador ideal, encuentre:

- La relación de transformación N .
- La impedancia de entrada Z_e .
- La corriente de salida I_2 .
- La corriente de entrada I_1 .
- La potencia de entrada P_1 y la potencia de salida P_2 .



Solución:

a)

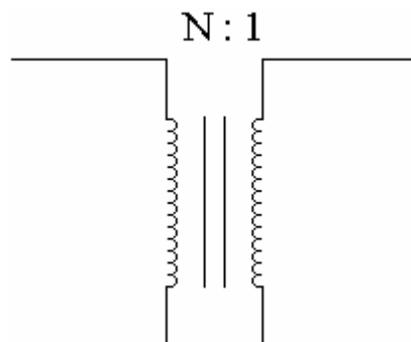
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \therefore n_1 = \frac{n_2 V_1}{V_2} = \frac{6 \times 120}{12} = 60$$

$$n_1 = 60 \text{ vueltas.}$$

y la relación de transformación vale

$$N = \frac{n_1}{n_2} = \frac{60}{6} = 10$$

La relación de transformación en un transformador se denota como se muestra:



Esto indica, en nuestro caso, que por cada 10 vueltas en el primario, en el secundario se tendrá una vuelta (transformador reductor o de bajada).

b) La impedancia de entrada se calcula de

$$Z_e = N^2 Z_s$$

$$Z_e = (10)^2 (2 \times 10^3) = 200 \text{ k}\Omega$$

c) La corriente de salida I_2 es

$$I_2 = \frac{12}{2000} = 6 \times 10^{-3} = 6 \text{ mA}$$

d) La corriente de entrada es

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} \therefore I_1 = \frac{n_2}{n_1} I_2 = \frac{6}{60} (6 \times 10^{-3})$$

$$I_1 = 0.6 \text{ mA}$$

En este problema no hemos incluido el signo negativo en la ecuación de corrientes $I_1 = -\frac{1}{N} I_2$ del transformador, ya que I_2 aparece en sentido contrario al del símbolo convenido para el transformador.

Nótese que la corriente de entrada I_1 también pudo calcularse por la ley de Ohm en el circuito primario como

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_e} = \frac{120}{200 \text{ k}\Omega} = 0.6 \times 10^{-3} = 0.6 \text{ mA}$$

por lo que I_1 depende de la impedancia reflejada en el primario del transformador.

Asimismo, se observa que si el voltaje se redujo 10 veces ($N=10$) en el secundario del transformador, la corriente de salida aumentó en la misma proporción y la potencia de entrada es igual a la potencia de salida.

e)

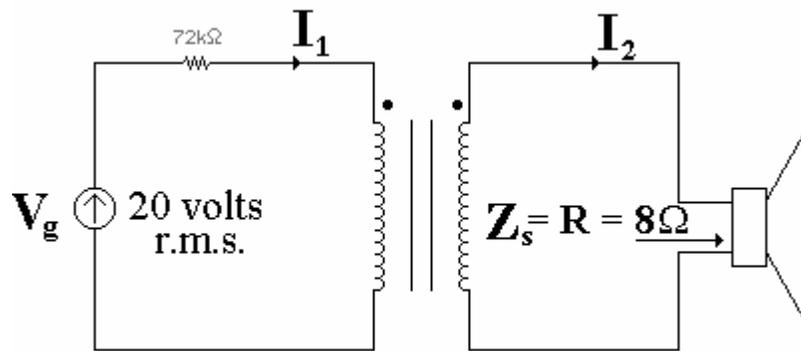
$$P_1 = V_1 I_1 = (120)(0.6 \times 10^{-3}) = 72 \text{ mW}$$

$$P_2 = V_2 I_2 = (12)(6 \times 10^{-3}) = 72 \text{ mW}$$

$$\text{y } P_1 = P_2$$

PROBLEMA 15

En el circuito dado, encuentre la relación de transformación N que debe tener el transformador para suministrar la máxima potencia al altavoz y determine dicha potencia si su impedancia es de 8Ω .



Solución:

Por el teorema de la máxima transferencia de potencia, ésta se tendrá cuando la resistencia reflejada en el primario del transformador (carga) sea igual a la resistencia de Thévenin, en este caso de 72Ω .

En el transformador ideal se tiene que

$$Z_e = N^2 Z_s \text{ siendo } N = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\text{Así } 72 = N^2 \times 8$$

$$\therefore N^2 = \frac{72}{8} = 9$$

y la relación de transformación es $N = 3$.

La corriente I_1 valdrá:

$$I_1 = \frac{20}{144} \text{ amp.}$$

El voltaje V_1 (voltaje en el primario del transformador) es, por tanto:

$$V_1 = 72I_1 = 72\left(\frac{20}{144}\right) = 10 \text{ volts}$$

Elvio Candelaria Cruz

269

De la relación de voltajes del transformador ideal dada por

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{N}$$

obtenemos $V_2 = \frac{V_1}{N} = \frac{10}{3} \text{ volts}$

La corriente I_2 valdrá:

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_s} = \frac{V_2}{8} = \frac{\frac{10}{3}}{8} = \frac{5}{12} \text{ amp.}$$

$$I^2 = \frac{25}{144}$$

y la potencia máxima transferida al altavoz es

$$P_{max} = R|I|^2 = 8\left(\frac{25}{144}\right) = \frac{200}{144}$$

$$P_{max} = 1.38 \text{ watts}$$

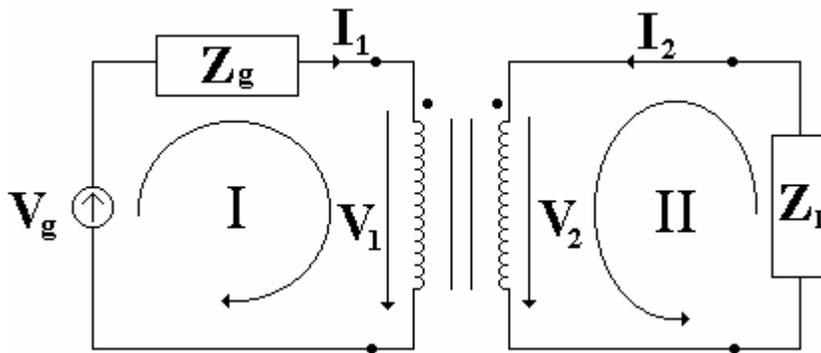
Se observa que la fuente entrega una potencia

$$P_f = V I_1 = 20\left(\frac{20}{144}\right) = 2.77 \text{ watts}$$

de los cuales 1.38 watts se disipan en la resistencia interna de la fuente y 1.38 watts se entregan a la carga, que es la potencia que se transfiere a la bocina, como ya se había calculado.

PROBLEMA 16

En el circuito mostrado obtenga la expresión para calcular V_2 en función de las impedancias Z_g y Z_L para una V_g dada.



Solución:

Método 1. Las ecuaciones del transformador son:

$$V_1 = NV_2 \therefore V_2 = \frac{V_1}{N} \dots \dots \dots (1)$$

$$I_1 = -\frac{1}{N}I_2 \therefore I_2 = -NI_1 \dots \dots \dots (2)$$

De la malla I:

$$\begin{aligned} Z_g I_1 + V_1 - V_g &= 0 \\ \therefore V_g &= Z_g I_1 + V_1 \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

De la malla II:

$$\begin{aligned} V_2 + I_2 Z_L &= 0 \\ \therefore V_2 &= -I_2 Z_L \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) y (2) en (4) obtenemos

$$\frac{V_1}{N} = -I_2 Z_L = -(-N I_1) Z_L$$

$$\text{o } V_1 = N^2 I_1 Z_L$$

y sustituyendo esta expresión en (3):

$$V_g = Z_g I_1 + N^2 I_1 Z_L = (Z_g + N^2 Z_L) I_1$$

La impedancia vista desde la fuente V_g es:

$$\frac{V_g}{I_1} = Z_g + N^2 Z_L$$

El término $Z_L N^2$ es la “impedancia reflejada” en el primario del transformador (Z_e).

De la ecuación anterior,

$$I_1 = \frac{V_g}{Z_g + N^2 Z_L} \dots\dots\dots(5)$$

Así, de (4) y (2):

$$V_2 = -Z_L I_2 = -Z_L (-N I_1)$$

$$V_2 = N Z_L I_1$$

y sustituyendo (5) en esta última ecuación:

$$V_2 = \frac{N Z_L}{Z_g + N^2 Z_L} V_g$$

Método 2.

Malla I: $Z_g I_1 + V_1 = V_g$(1)

Malla II: $Z_L I_2 + V_2 = 0$(2)

Ecuaciones del transformador: $\begin{cases} V_1 = N V_2 \dots\dots\dots(3) \\ I_1 = -\frac{1}{N} I_2 \dots\dots\dots(4) \end{cases}$

Sustituyendo (3) y (4) en (1):

$$Z_g \left(-\frac{1}{N} I_2 \right) + N V_2 = V_g \dots\dots\dots(A)$$

$$Z_L I_2 + V_2 = 0 \dots\dots\dots(B)$$

resolviendo (A) y (B) para V_2 por determinantes:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{Z_g}{N} & V_g \\ Z_L & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{Z_g}{N} & N \\ Z_L & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{Z_L V_g}{-\frac{Z_g}{N} - N Z_L} = \frac{-Z_L V_g}{-\frac{Z_g + N^2 Z_L}{N}}$$

$$V_2 = \frac{N Z_L}{Z_g + N^2 Z_L} V_g$$

PROBLEMA 17

A partir de las ecuaciones de un cuadripolo con parámetros Z deduzca las expresiones que permitan calcular:

- a) Los parámetros Y en función de los parámetros Z .
- b) Los parámetros Z en función de los parámetros h .

Solución:

a)

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \dots\dots\dots(1)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \dots\dots\dots(2)$$

En las ecuaciones anteriores despejamos a I_1 e I_2 :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} \\ V_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{22}V_1 - Z_{12}V_2}{\Delta}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 \\ Z_{21} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{11}V_2 - Z_{21}V_1}{\Delta}$$

Las ecuaciones para un cuadripolo con parámetros Y son:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \dots\dots\dots(3)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \dots\dots\dots(4)$$

Comparando la I_1 calculada, con la ecuación (3) se obtiene

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta}$$

$$Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta}$$

Comparando la I_2 calculada, con la ecuación (4) se obtiene

$$Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta} \quad (Z_{21} = Z_{12})$$

$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta}$$

Con los resultados anteriores se da respuesta al inciso *a*); sin embargo, podemos obtener una expresión general para el propósito buscado haciendo las siguientes consideraciones.

Del determinante general de Z vemos que $Z_{22} = \text{cof } Z_{11}$, $-Z_{12} = \text{cof } Z_{12}$ y

$Z_{11} = \text{cof } Z_{22}$. Sustituyendo estos parámetros en Y_{11} , Y_{12} y Y_{22} se obtiene:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta} = \frac{\text{cof } Z_{11}}{\Delta}$$

$$Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta} = \frac{\text{cof } Z_{12}}{\Delta}$$

$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta} = \frac{\text{cof } Z_{22}}{\Delta}$$

Las expresiones anteriores permiten establecer que

$$Y_{n,p} = \frac{\text{cof } Z_{p,n}}{\Delta_Z} \quad (\Delta_Z = \Delta = |Z|)$$

b) Las ecuaciones para un cuadripolo con parámetros híbridos son:

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \dots\dots\dots(5)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \dots\dots\dots(6)$$

De las ecuaciones anteriores despejamos a I_1 :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & h_{12} \\ I_2 & h_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{22} V_1 - h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

y

$$\frac{h_{22} V_1}{\Delta_h} = I_1 + \frac{h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

o

$$V_1 = \frac{\Delta_h}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2$$

Comparando la V_1 calculada, con la ecuación (1) dada por

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

se obtiene

$$Z_{11} = \frac{\Delta_h}{h_{22}}$$

$$Z_{12} = \frac{h_{12}}{h_{22}}$$

De las ecuaciones (5) y (6) despejamos a V_2 :

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & V_1 \\ h_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{11}I_2 - h_{21}V_1}{\Delta_h}$$

Sustituyendo V_1 en la ecuación anterior:

276

Problemario de Circuitos Eléctricos II

$$V_2 = \frac{h_{11}I_2 - h_{21}\left(\frac{\Delta_h}{h_{22}}I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}}I_2\right)}{\Delta_h} = \left(\frac{h_{11}}{\Delta_h} - \frac{h_{21}h_{12}}{\Delta_h h_{22}}\right)I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}}I_1$$

$$V_2 = \left(\frac{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}}{\Delta_h h_{22}}\right)I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}}I_1$$

pero $h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12} = \Delta_h$, así que

$$V_2 = \frac{\Delta_h}{\Delta_h h_{22}}I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}}I_1$$

$$V_2 = \frac{1}{h_{22}}I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}}I_1$$

Comparando la V_2 calculada, con la ecuación (2) dada por

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

se obtiene

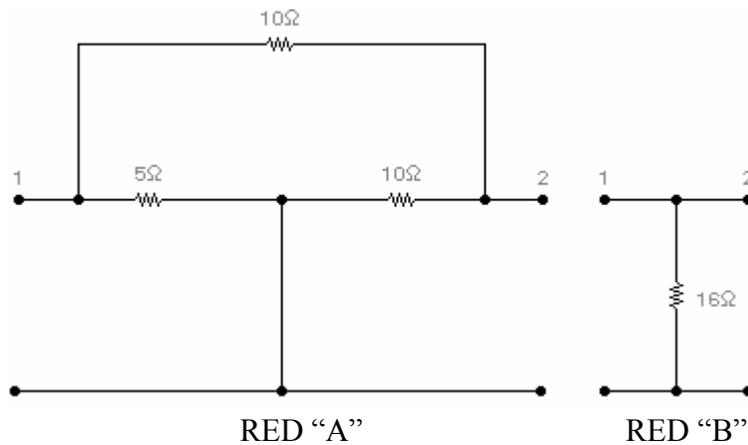
$$Z_{21} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} \quad (h_{12} = -h_{21})$$

$$Z_{22} = \frac{1}{h_{22}}$$

Hemos expresado los parámetros \mathbf{Y} en términos de los parámetros \mathbf{Z} y éstos, a su vez, en términos de los parámetros \mathbf{h} ; es posible la conversión de un tipo de parámetros en otro cualquiera, existiendo tablas elaboradas que facilitan dicha conversión.

PROBLEMA 18

Caracterice cada una de las siguientes redes por sus ecuaciones con parámetros de circuito abierto, conéctelas en serie y escriba las ecuaciones del cuadripolo resultante.



Solución:

Las ecuaciones del cuadripolo resultante o equivalente pueden obtenerse al conocer los parámetros individuales de cada red, razón por la que caracterizaremos cada una de ellas.

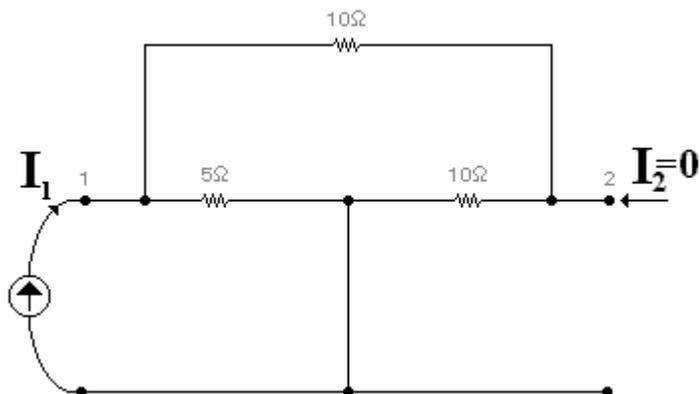
Las ecuaciones con parámetros de circuito abierto son:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

RED "A"

Con $I_2=0$:



278

Problemas de Circuitos Eléctricos II

Por reducción serie-paralelo:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{\left(\frac{20 \times 5}{20+5}\right) I_1}{I_1} = 4 \Omega$$

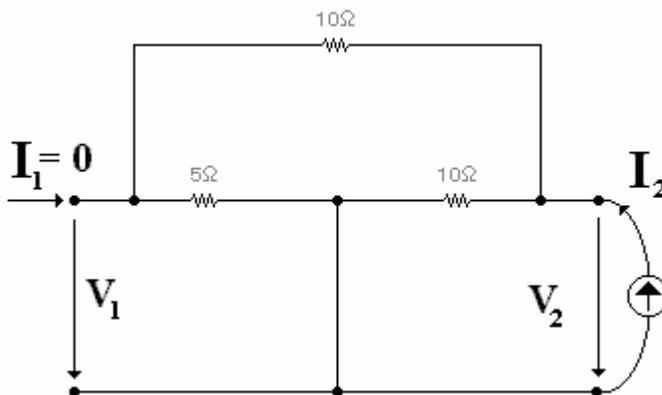
$$V_2 = 10 I_k$$

Para calcular I_k emplearemos divisor de corriente.

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{10 I_k}{I_1} = \frac{10 \left(\frac{5 I_1}{25}\right)}{I_1} = 2 \Omega$$

Por ser red recíproca $Z_{21} = Z_{12} = 2 \Omega$.

Para calcular Z_{22} nos apoyaremos en la red correspondiente:



Por reducción serie-paralelo:

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{15 \times 10}{25} I_2 = 6\Omega$$

Así, para la RED "A"

$$V_1 = 4I_1 + 2I_2$$

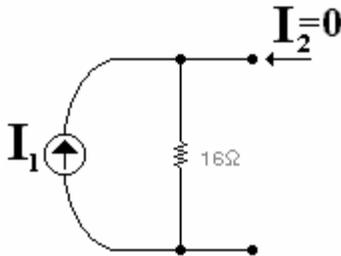
$$V_2 = 2I_1 + 6I_2$$

Elvio Candelaria Cruz

279

RED "B"

Con $I_2=0$:



$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{16I_1}{I_1} = 16\Omega$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{16I_1}{I_1} = 16\Omega = Z_{12}$$

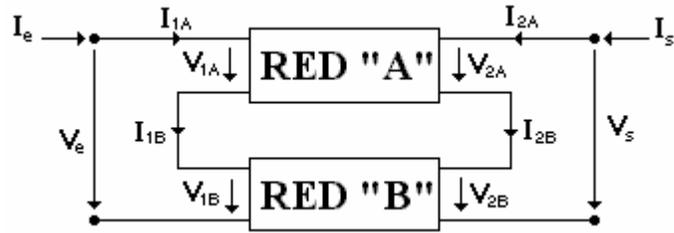
Siendo la red simétrica se tiene que $Z_{22} = Z_{11} = 16\Omega$.

Así, para la RED "B"

$$V_1 = 16I_1 + 16I_2$$

$$V_2 = 16I_1 + 16I_2$$

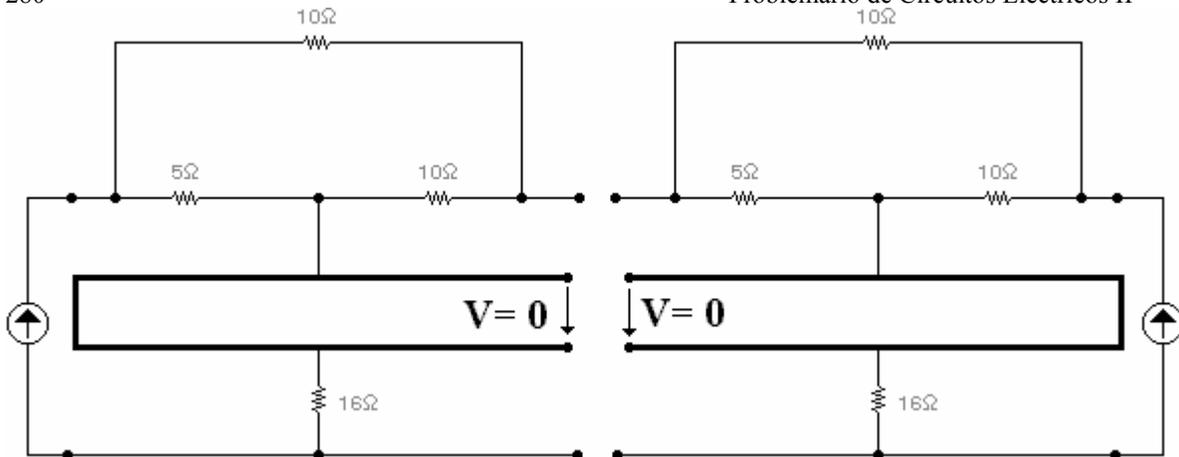
La conexión de dos cuadripolos en SERIE se ilustra en la siguiente figura:



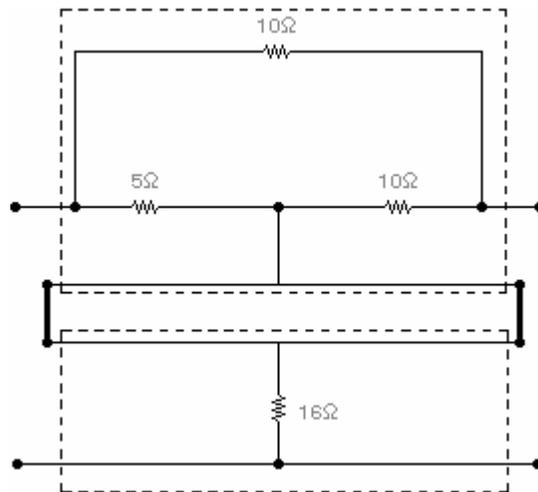
La prueba de validez de Otto Brune debe satisfacerse para que ambas redes puedan conectarse directamente sin necesidad de un transformador de relación 1:1. En las siguientes figuras la terminal común se visualiza con línea gruesa, cumpliéndose en ambos casos la condición $V = 0$ que se requiere.

280

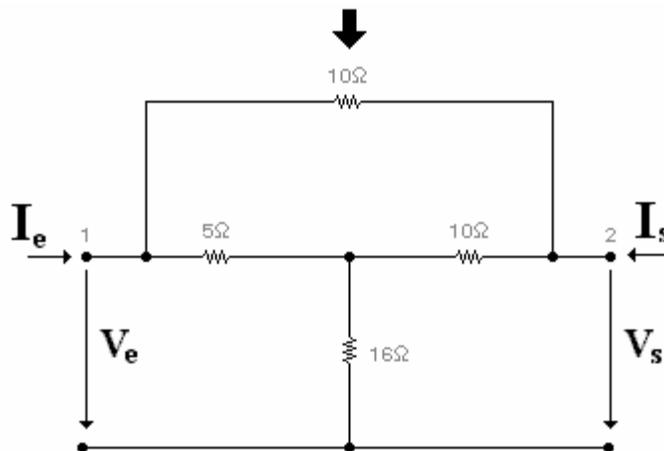
Problemas de Circuitos Eléctricos II



Por lo que la conexión en SERIE de ambas redes es:



De los resultados obtenidos anteriormente establecemos:



Elvio Candelaria Cruz

281

RED "A":
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

RED "B":
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

La matriz general de impedancia para circuitos de dos puertos conectados en SERIE es la suma de sus matrices de impedancia individuales.

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+16 & 2+16 \\ 2+16 & 6+16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$$

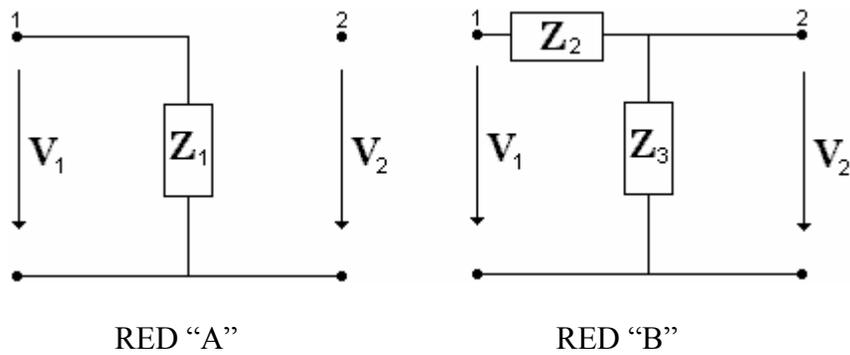
y las ecuaciones del cuadripolo resultante son:

$$V_e = 20I_e + 18I_s$$

$$V_s = 18I_e + 22I_s$$

PROBLEMA 19

En cada una de las siguientes estructuras de dos puertos calcule los parámetros de corto circuito, conecte ambas estructuras en paralelo y escriba las ecuaciones del cuadripolo resultante.



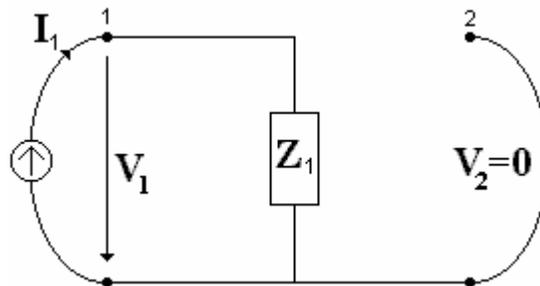
Solución:

Las ecuaciones con parámetros de corto circuito son:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

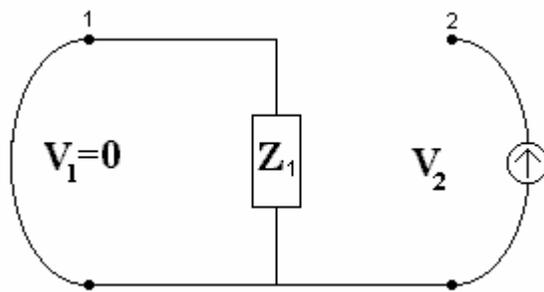
$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

RED "A". El circuito correspondiente para $V_2 = 0$ es:



$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{Z_1} V_1}{V_1} = \frac{1}{Z_1} \text{ mhos}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{0}{V_1} = 0 \text{ mhos}$$

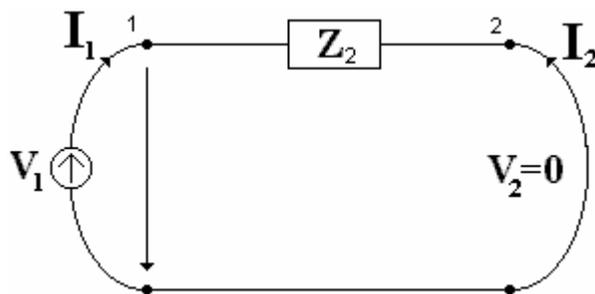


$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{0}{V_2} = 0 \text{ mhos}$$

Cumpléndose que $Y_{21} = Y_{12}$

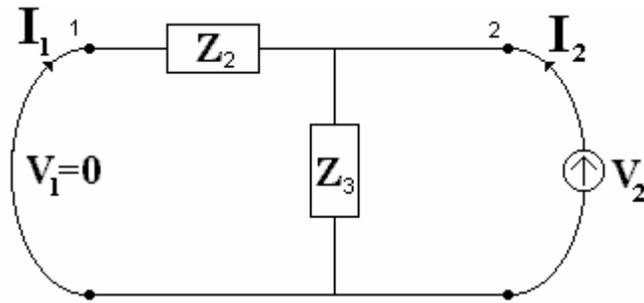
$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{0}{V_2} = 0 \text{ mhos}$$

RED "B". Con $V_2 = 0$:



$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{Z_2} V_1}{V_1} = \frac{1}{Z_2} \text{ mhos}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} = \frac{-\frac{1}{Z_2} V_1}{V_1} = -\frac{1}{Z_2}$$

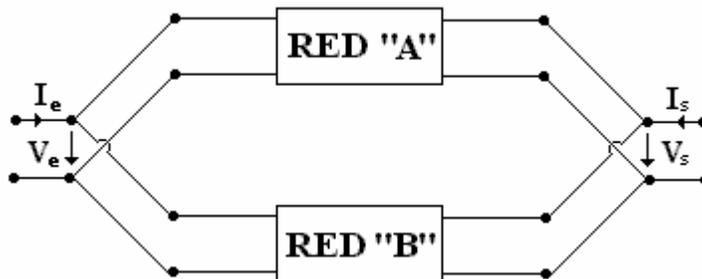


$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-\frac{1}{Z_2} V_2}{V_2} = -\frac{1}{Z_2} \text{ mhos}$$

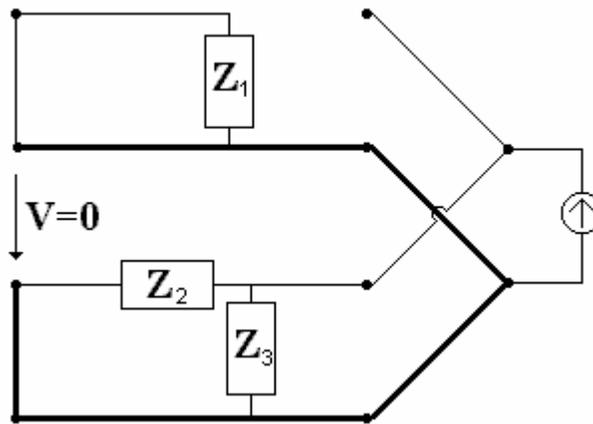
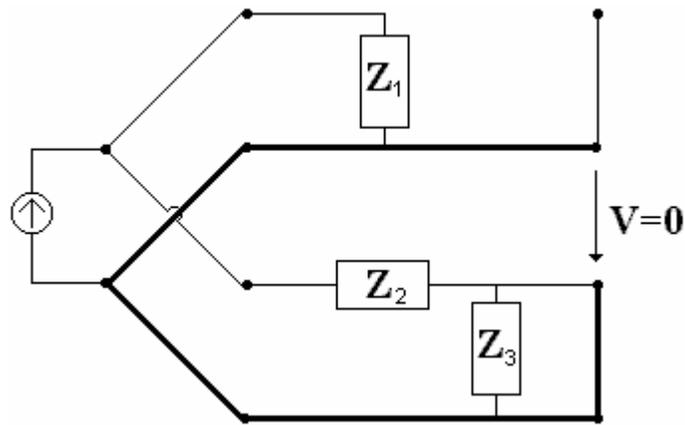
Por ser recíproca la red se ve que $Y_{21} = Y_{12}$.

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{\frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} V_2}{V_2} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3}$$

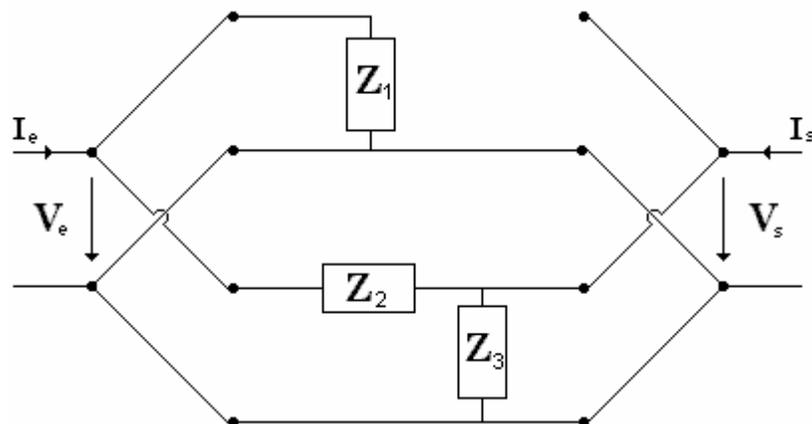
La conexión de dos cuadripolos en paralelo se ilustra en la siguiente figura:



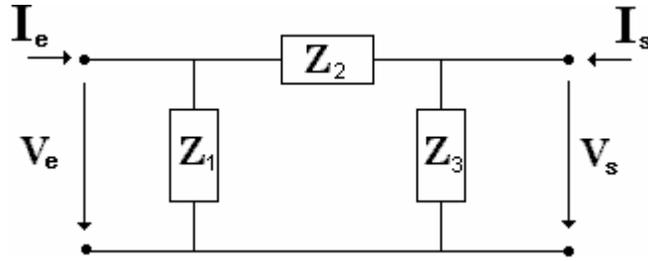
Al conectar en paralelo las dos redes dadas se satisface la prueba de validez de Brune, según se muestra:



Lo anterior permite conectar directamente las redes sin necesidad de un transformador ideal, como sigue:



Esta conexión es la misma que se muestra en la siguiente figura:



De los resultados obtenidos anteriormente establecemos:

$$\text{RED "A": } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{RED "B": } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

La matriz general de admitancia para circuitos de dos puertos conectados en paralelo es la suma de sus matrices de admitancia individuales.

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

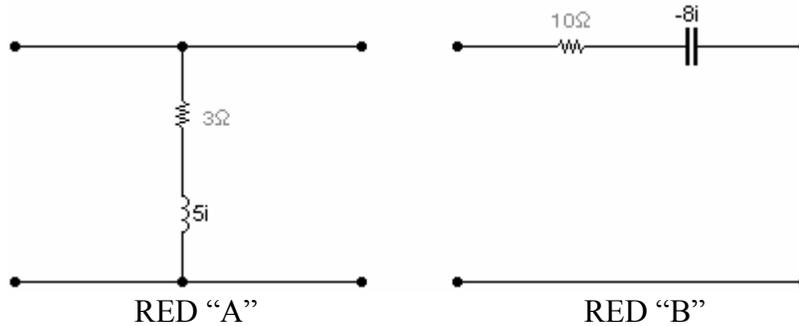
Finalmente, las ecuaciones del cuadripolo resultante son:

$$I_e = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) V_e + \left(-\frac{1}{Z_2} \right) V_s$$

$$I_s = \left(-\frac{1}{Z_2} \right) V_e + \left(\frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \right) V_s$$

PROBLEMA 20

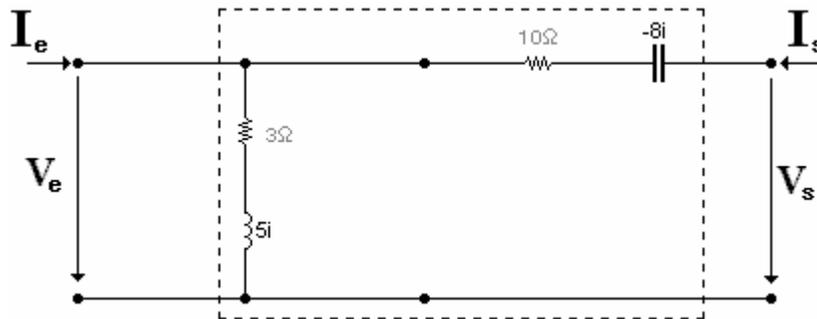
Conecte en cascada las dos redes que se muestran y obtenga las ecuaciones con parámetros de transmisión directos del cuadripolo resultante.



Solución:

Dos cuadripolos se conectan en cascada cuando el puerto de salida de uno se une directamente al puerto de entrada del otro.

En nuestro caso, la red resultante es:



Las ecuaciones del cuadripolo resultante o equivalente pueden obtenerse al conocer los parámetros individuales de cada red, razón por la que caracterizaremos cada una de ellas.

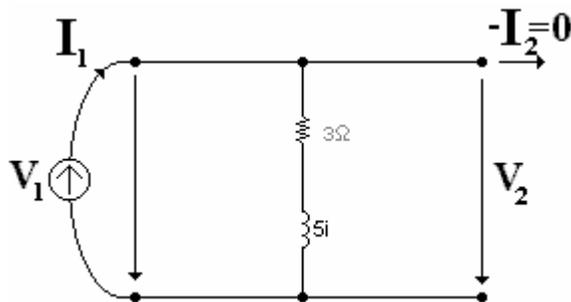
Las ecuaciones con parámetros de transmisión directos son:

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

RED "A"

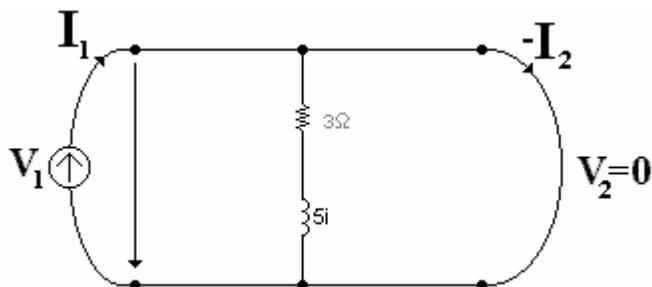
Con la condición $-I_2 = 0$ se tiene:



$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} = 1 \quad (V_1 = V_2)$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} = \frac{\left(\frac{1}{3+5i} \right) V_2}{V_2} = \frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{34} \text{ mhos}$$

Para la condición $V_2 = 0$ el circuito es:



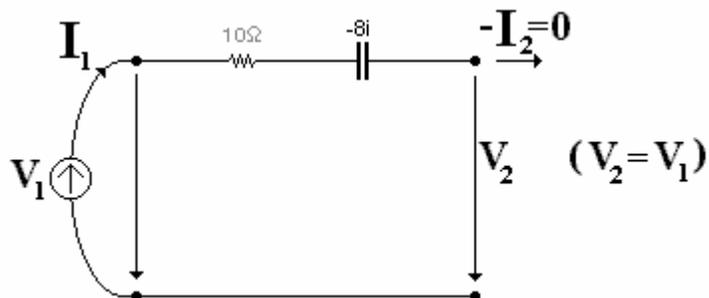
Se observa que $-I_2 = I_1 = \infty$.

$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{V_1}{\infty} = 0$$

$$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = 1$$

RED "B"

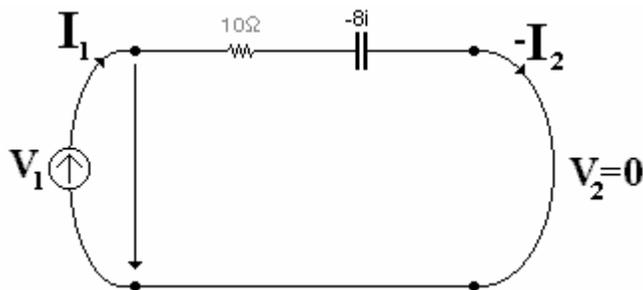
Con la condición $-I_2 = 0$:



$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} = 1$$

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} = \frac{0}{V_2} = 0$$

Para la condición $V_2 = 0$ el circuito es:



Se observa que $I_1 = -I_2$

$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{(10 - 8i)(-I_2)}{-I_2} = 10 - 8i \quad \Omega$$

$$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = 1$$

Las ecuaciones matriciales para cada red son:

$$\text{RED "A"} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{1A} \\ \mathbf{I}_{1A} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3-5i}{34} & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{2A} \\ -\mathbf{I}_{2A} \end{array} \right\}$$

$$\text{RED "B"} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{1B} \\ \mathbf{I}_{1B} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 10-8i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{2B} \\ -\mathbf{I}_{2B} \end{array} \right\}$$

La matriz de transmisión general para dos cuadripolos conectados en cascada es el producto matricial de sus matrices individuales de transmisión, multiplicadas en el orden natural, esto es, el primer factor es el cuadripolo de entrada. Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3-5i}{34} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10-8i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_s \\ -\mathbf{I}_s \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_e \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 10-8i \\ \frac{3-5i}{34} & \frac{24-74i}{34} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_s \\ -\mathbf{I}_s \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones del cuadripolo resultante son:

$$\mathbf{V}_e = (1)\mathbf{V}_s + (10-8i)(-\mathbf{I}_s)$$

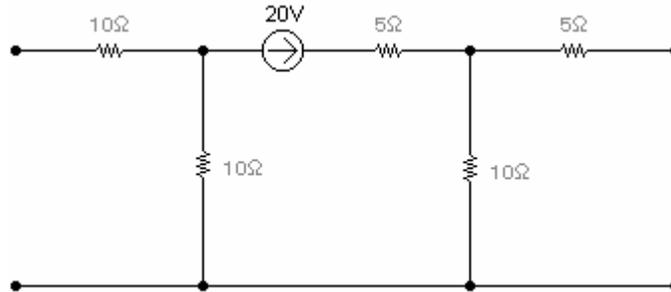
$$\mathbf{I}_e = \left(\frac{3-5i}{34}\right)\mathbf{V}_s + \left(\frac{24-74i}{34}\right)(-\mathbf{I}_s)$$

Si se desea calcular los parámetros directamente de la red resultante, se obtendrán los mismos resultados (ver problema núm. 8 de este capítulo).

***PROBLEMAS
COMPLEMENTARIOS***

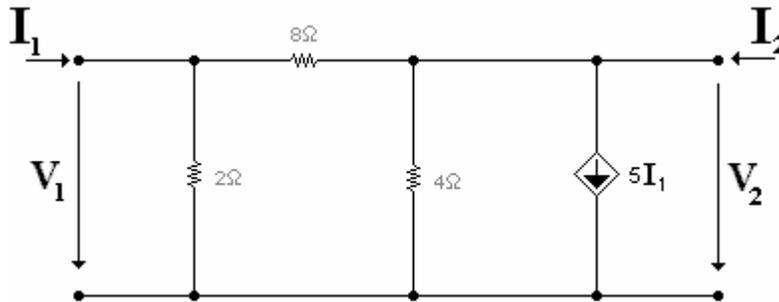
PROBLEMA 1

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de circuito abierto y obtenga sus circuitos equivalentes en V y en T .



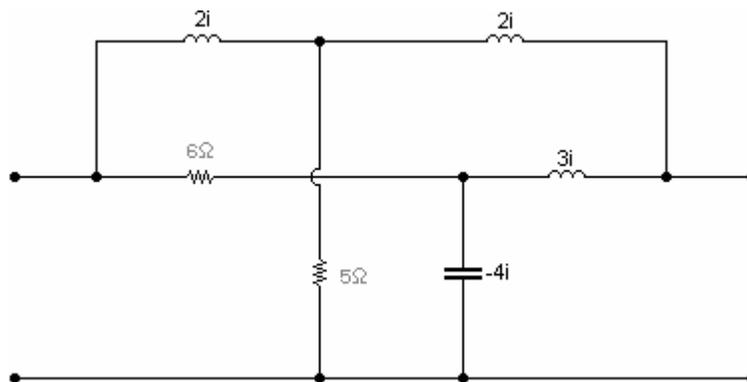
PROBLEMA 2

En la red mostrada, que contiene una fuente de corriente controlada por corriente, calcule los parámetros de circuito abierto.



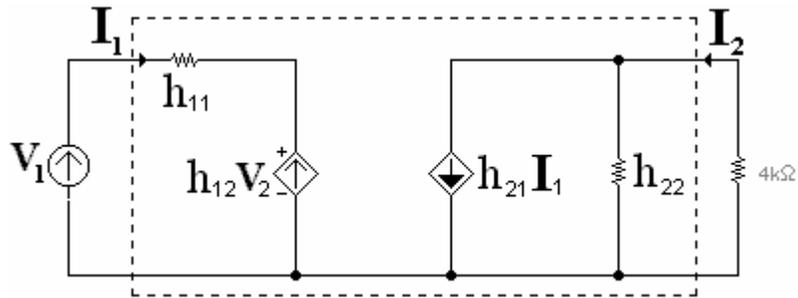
PROBLEMA 3

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de corto circuito.



PROBLEMA 4

En el circuito equivalente de un transistor con parámetros híbridos directos que se muestra, determine la ganancia en corriente $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$, la ganancia en voltaje $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ y la impedancia de entrada (Z_{ent}).



Transistor

Datos:

$$h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$$

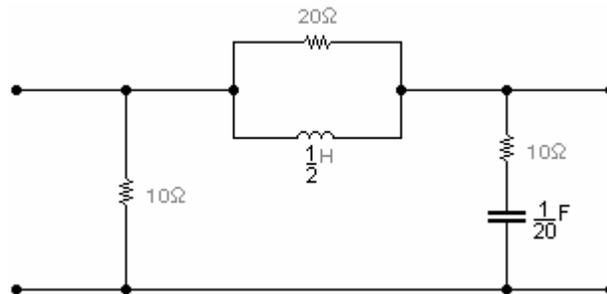
$$h_{12} = 2.5 \times 10^{-4}$$

$$h_{21} = 40$$

$$h_{22} = 50 \text{ }\mu\text{mhos}$$

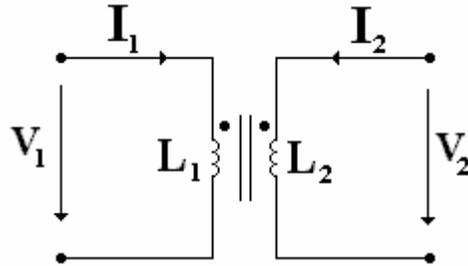
PROBLEMA 5

Calcule los parámetros híbridos directos de la red mostrada y obtenga su circuito equivalente, a la frecuencia $\omega = 10 \text{ rad/seg}$.



PROBLEMA 6

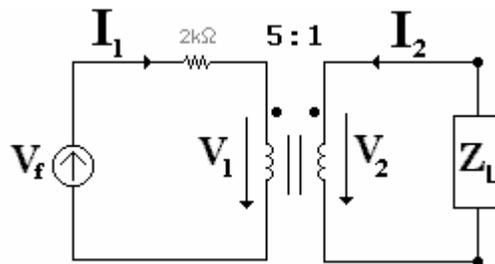
A partir de las ecuaciones de un cuadripolo con parámetros de transmisión directos y considerando las características físicas que definen al transformador ideal deduzca las ecuaciones de este dispositivo, cuyo símbolo se muestra en la figura.



PROBLEMA 7

En el circuito que se muestra, $Z_L = 100 - 50i$. Calcule la potencia media o activa entregada a Z_L si

- $I_2 = 3 \angle 60^\circ$ amp.
- $V_2 = 80 \angle 30^\circ$ volts
- $I_1 = 2 \angle 20^\circ$ amp.
- $V_f = 1000 \angle 0^\circ$ volts



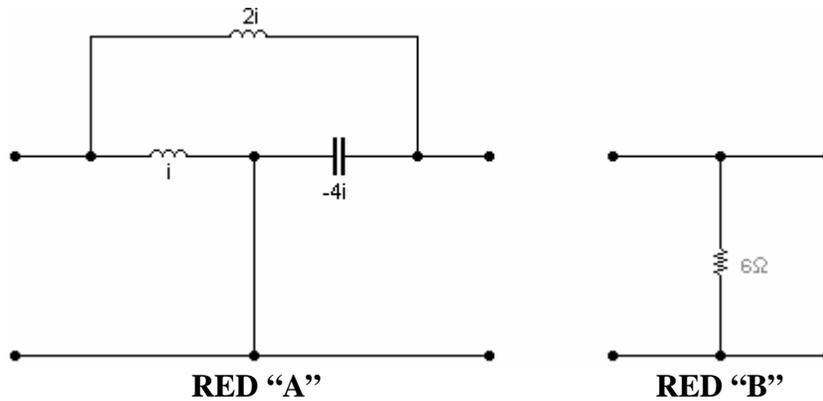
PROBLEMA 8

A partir de las ecuaciones de un cuadripolo con parámetros Y deduzca las expresiones que permitan calcular:

- Los parámetros Z en función de los parámetros Y .
- Los parámetros Y en función de los parámetros h .

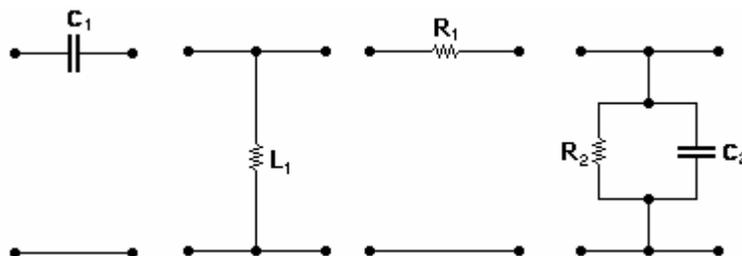
PROBLEMA 9

En cada una de las siguientes estructuras de dos puertos calcule los parámetros de circuito abierto, conecte ambas estructuras en serie y obtenga las ecuaciones del cuadripolo resultante.



PROBLEMA 10

Conecte en cascada las redes dadas y escriba las ecuaciones con parámetros de transmisión directos del cuadripolo resultante.



BIBLIOGRAFÍA

- Bustamante Llaca, Enrique, *Modern Analysis of Alternating Current Networks*, vol. I y II, Limusa-Wiley, S.A.
- Jiménez Garza Ramos, Fernando, *Problemas de Teoría de los Circuitos*, vol. I y II, Limusa-Noriega Editores, S.A.
- Jiménez Garza Ramos, Fernando, *Análisis de Circuitos Eléctricos*, Limusa-Noriega Editores, S.A.
- Edminister, Joseph A., *Circuitos Eléctricos*, Serie Schaum McGraw-Hill.
- Boylestad, Robert L., *Análisis Introductorio de Circuitos*, Pearson Educación.
- Hayt, William H. y Kemmerly, Jack E., *Análisis de Circuitos en Ingeniería*, McGraw-Hill.
- Benítez Serrano, Ismael, *Circuitos Eléctricos*, vol. I y II.
- Johnson, David E. y Hilburn, John L., *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*, Prentice Hall.
- Gerez Greiser, Víctor y Murray-Lasso, M. A., *Teoría de Sistemas y Circuitos*, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.
- Bobrow, L. S., *Análisis de Circuitos Eléctricos*, Interamericana, S.A., de C.V.
- Nilson, James W. y Riedel, Susan A., *Circuitos Eléctricos*, Pearson Educación.
- Van Valkenburg, M. E., *Análisis de Redes*, Limusa, S.A.
- Hsu, Hwei P., *Análisis de Fourier*, Pearson Educación.
- Cheng, David K., *Analysis of Linear Systems*, Addison-Wesley.
- García Talavera, Guillermo, *Teoría de los circuitos*, vol. I, II, III, IV, Instituto Politécnico Nacional.
- García Talavera, Guillermo, *Problemas y Soluciones de Técnicas de Telecomunicaciones*, Limusa-Noriega Editores, S.A.
- Bogdanov, E. I., *Problemas de Circuitos Eléctricos de Corriente Alterna*, Limusa-Noriega Editores, S.A.
- Dorf, Richard C., *Circuitos Eléctricos-Introducción al Análisis y Diseño*, Alfaomega, S.A., de C.V.
- Hubert, Charles I., *Circuitos Eléctricos CA/CC Enfoque Integrado*, McGraw-Hill.
- Tocci, R. J., *Circuitos y Dispositivos Electrónicos*, Interamericana S.A., de C.V.

Impreso en los Talleres Gráficos de la
Dirección de Publicaciones del
Instituto Politécnico Nacional
Tresguerras 27, Centro Histórico, México, DF
Noviembre de 2004. Edición: 1 000 ejemplares

FORMACIÓN: Armando Acosta Alavez
DISEÑO DE PORTADA: Gerardo López Padilla
CORRECCIÓN Y SUPERVISIÓN: Manuel Toral Azuela
PROCESOS EDITORIALES: Manuel Gutiérrez Oropeza
PRODUCCIÓN: Martha Varela Michel
DIVISIÓN EDITORIAL: Jesús Espinosa Morales
DIRECTOR: Arturo Salcido Beltrán