PROBLEMARIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS II

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA
MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD ZACATENCO

PROBLEMARIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS II

Elvio Candelaria Cruz

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
—México—

Problemario de circuitos eléctricos II

Primera edición: 2004

Dirección de Publicaciones
Tresguerras 27, 06040, México, DF

ISBN 970-36-0205-3

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Al

M. en C. Arturo Cepeda Salinas

CONTENIDO

PRÓLOGO

Este trabajo es producto del Programa Académico de Año Sabático otorgado al autor durante el periodo 2001-2002. Externo mi agradecimiento al licenciado Francisco Ramírez Rodríguez, Coordinador General de Programas Académicos Especiales de la Secretaría Académica del Instituto Politécnico Nacional y al licenciado Alfredo Villafuerte Iturbide, responsable del Programa Año Sabático, por las atenciones que se sirvieron brindar al suscrito para hacer posible la realización de este trabajo.

El presente *Problemario de circuitos eléctricos* II está destinado a estudiantes de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica y carreras afines; tiene como finalidad servir de apoyo en su preparación profesional para el estudio de la Teoría de los Circuitos Eléctricos en los tópicos que se tratan.

Se ha pretendido facilitar la comprensión de los temas mediante el planteamiento, desarrollo y solución metódicos de problemas ilustrativos que permitan al estudiante ejercitar sus conocimientos teóricos y prácticos.

Para la resolución paso a paso de problemas de este trabajo se utilizaron, en gran parte, las técnicas de análisis de los métodos de mallas y nodos desarrollados por el doctor Enrique Bustamante Llaca en su importante obra *Modern Analysis of Alternating Current Networks*, por lo que se recomienda al estudiante conocer previamente estos métodos. Cabe mencionar que en dichos análisis se emplean letras minúsculas para denotar impedancias de mallas o admitancias de nodos y con letras mayúsculas las impedancias o admitancias de elementos. Asimismo gran parte de la simbología usada en este problemario es la misma de la obra citada.

Es mi convencimiento de que solamente el esfuerzo propio del estudiante hará de este trabajo un recurso didáctico provechoso.

Finalmente deseo expresar mi agradecimiento a José Juan Carbajal Hernández, pasante de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica por su apoyo e iniciativa en la captura del material de esta obra.

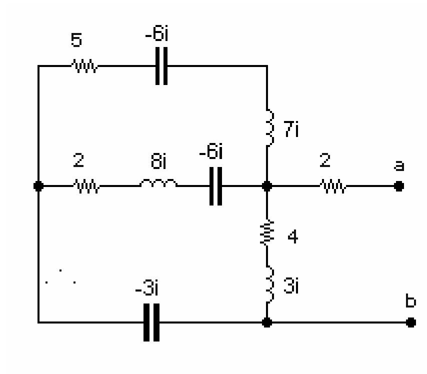
Elvio Candelaria Cruz.

CAPÍTULO I

ESTRUCTURAS PASIVAS DE DOS TERMINALES

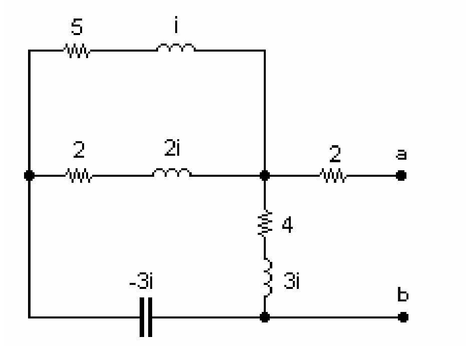
PROBLEMA 1

Calcule la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** de la red mostrada:

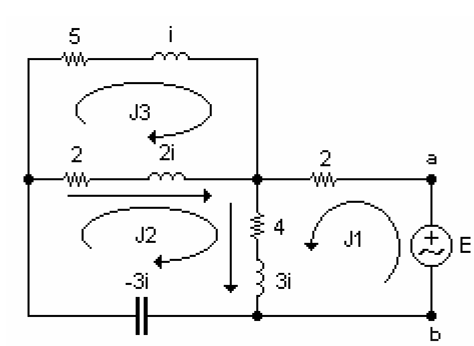


Solución:

1. Se hace una simplificación del circuito:



Se conecta una fuente de voltaje *E* y se asignan sentidos arbitrarios a elementos y a las corrientes de mallas; la fuente se conecta a las terminales de interés. La malla formada con la fuente de voltaje debe ser la malla 1:



2. Se calculan las impedancias propias y mutuas de mallas (aplicar las reglas del método de mallas):

$Z_{11} = 6 + 3i$

$Z_{22} = 6 + 2i$

$Z_{33} = 7 + 3i$

$Z_{12} = 4 + 3i$

$Z_{13} = 0$

$Z_{23} = -2 - 2i$

3. Aplicando la fórmula general:

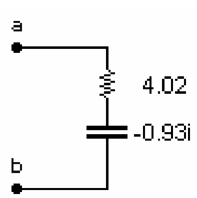
$$Z_{ab} = \frac{\det Z_{m,r}}{\mathrm{cof}\, Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6+3i & 4+3i & 0 \\ 4+3i & 6+2i & -2-2i \\ 0 & -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6+2i & -2-2i \\ -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}}$$

$$\det Z_{m,r} = 167 + 63i = 178.5\angle 20.6^o$$

$$\mathrm{cof}\, Z_{11} = 36 + 24i = 43.2\angle 33.7^o$$

$$Z_{ab} = \frac{178.5\angle 20.6^o}{43.2\angle 33.7^o} = 4.13\angle -13.1^o = 4.02 - 0.93i\,\Omega$$

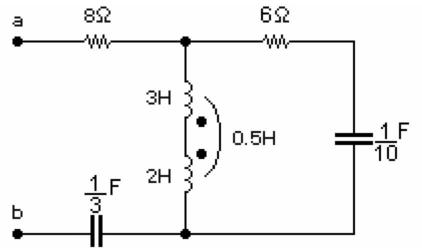
Este resultado significa que la red original es equivalente a:



Se sugiere al estudiante resolver este problema usando el método de reducción serie-paralelo.

PROBLEMA 2

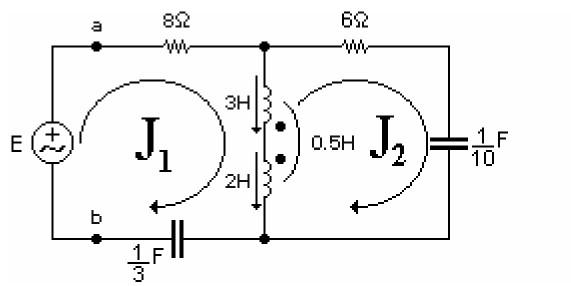
Encuentre la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** en la red dada, a la frecuencia angular ω=1rad/seg.



Solución:

1. Se conecta una fuente *E* entre las terminales *a* y *b*, con la cual se forma la malla 1. Se determina el signo de la inductancia mutua entre las bobinas *k* y *l*. Se asignan sentidos a elementos y a corrientes de malla.

$L_{k,l} < 0$
$L_{k,l} = -0.5$Hy



2. Se obtienen las impedancias propias y mutuas de mallas.

$$Z_{11} = 8 + i(1)(3 + 2) + \frac{3}{i(1)} + 2i(1)(-0.5) = 8 + i$$

$$Z_{22} = 6 + i(1)(3 + 2) + \frac{10}{i(1)} + 2i(1)(-0.5) = 6 - 6i$$

$$Z_{12} = -i(1)(3 + 2) - 2i(1)(-0.5) = -4i$$

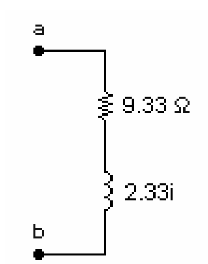
3. Se aplica la fórmula general:

$$Z_{eq} = Z_{ab} = \frac{det\ Z_{m,r}}{cof\ Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8+i & -4i \\ -4i & 6-6i \end{vmatrix}}{6-6i}$$

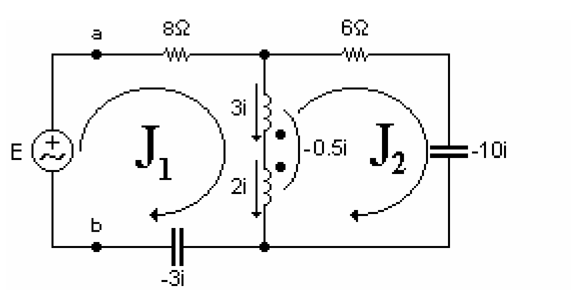
$$det\ Z_{m,r} = 70-42i$$

$$Z_{eq} = \frac{70-42i}{6-6i} = 9.33+2.33i$$

Esta impedancia se puede representar con elementos de circuito como se muestra:



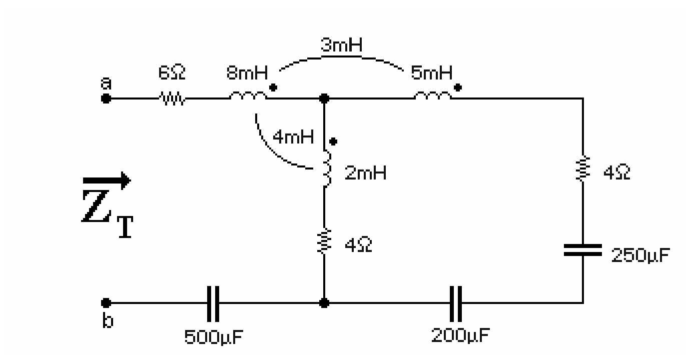
Es posible resolver este problema pasando del circuito original al circuito transformado, donde se indican las impedancias de elementos y aplicar así el método de mallas. El circuito transformado sería el que se muestra a continuación:



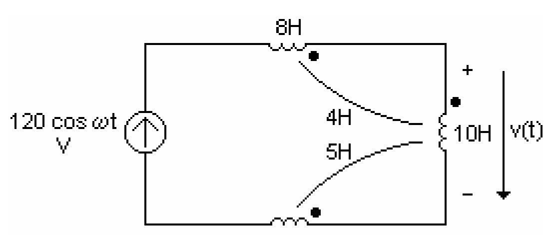
PROBLEMA 3

En la red mostrada calcule:

a) La impedancia total Z_T, a la frecuencia angular $\omega=10^3$ rad/seg.
b) El valor del inductor equivalente.

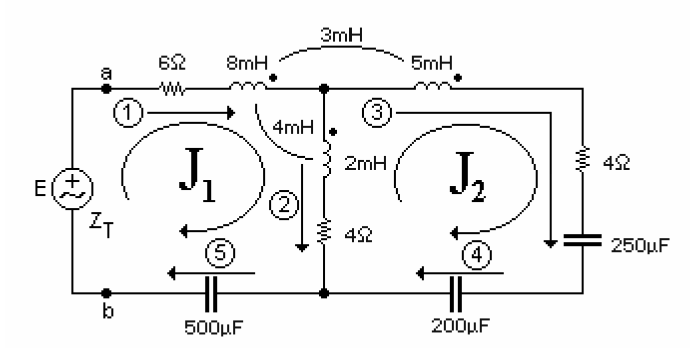


Observación: Una configuración con bobinas acopladas como se muestra en este circuito, no necesariamente debe tener acoplamiento entre todas ellas. Ver, por ej. Hayt William H.- Kemmerly Jack E. *Análisis de Circuitos en Ingeniería* problema 9, página 472, cuarta ed. – McGRAW HILL **"Es posible disponer físicamente tres bobinas de tal manera que haya un acoplamiento mutuo entre las bobinas *A* y *B* y entre *B* y *C*, pero no entre *A* y *C*. Un arreglo así se muestra en la figura dada. Obténgase v(t)"**.



O también ver Bustamante Llaca E. *Alternating Current Networks,* vol. I, ed. Limusa-Wiley, ej. 2, página 233 o Jiménez Garza Ramos Fernando *Problemas de Teoría de los Circuitos,* vol. 1, ed. Limusa, problema 1, página 72, entre otros ejemplos.

Solución: Habiendo conectado la fuente de voltaje *E*, la impedancia entre las terminales *a* y *b* (Z_T) se calcula como en los problemas anteriores.



De acuerdo con las marcas de polaridad en las bobinas:

$$L_{12} = -4x10^{-3} \text{ Hy}$$
$$L_{13} = 3x10^{-3} \text{ Hy}$$

$$Z_{11} = 6 + 4 + i10^3(8x10^{-3}) + i10^3(2x10^{-3}) + \frac{1}{i10^3 x500x10^{-6}} + 2\left[i10^3(-4x10^{-3})\right] = 10$$

$$Z_{22} = 4 + 4 + i10^3(2+5)10^{-3} + \frac{10^6}{i10^3 x200} + \frac{10^6}{i10^3 x250} = 8 - 2i$$

$$Z_{12} = -4 - i10^3 x2x10^{-3} - i10^3(-4x10^{-3}) + i10^3(3x10^{-3}) = -4 + 5i$$

$$Z_T = \frac{det\, Z_{m,r}}{cof\, Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -4+5i \\ -4+5i & 8-2i \end{vmatrix}}{8-2i} = \frac{672+338i}{68} = 9.88 + 4.97i$$

El valor de la bobina puede calcularse a partir de su impedancia:

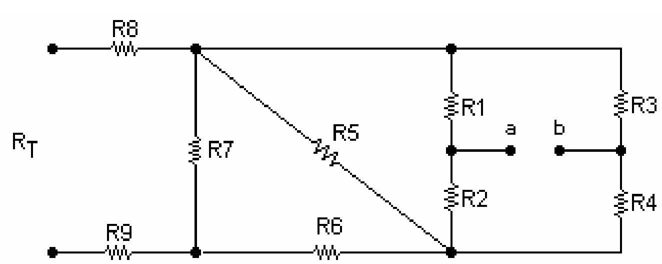
$$Z_L = i\omega L = i(10^3)L = 4.97i \quad \therefore \quad L = 4.97/10^3 = 4.97 \text{ mHy}$$

PROBLEMA 4

Encuentre la resistencia total $\boldsymbol{R_T}$ indicada que presenta el circuito mostrado cuando:

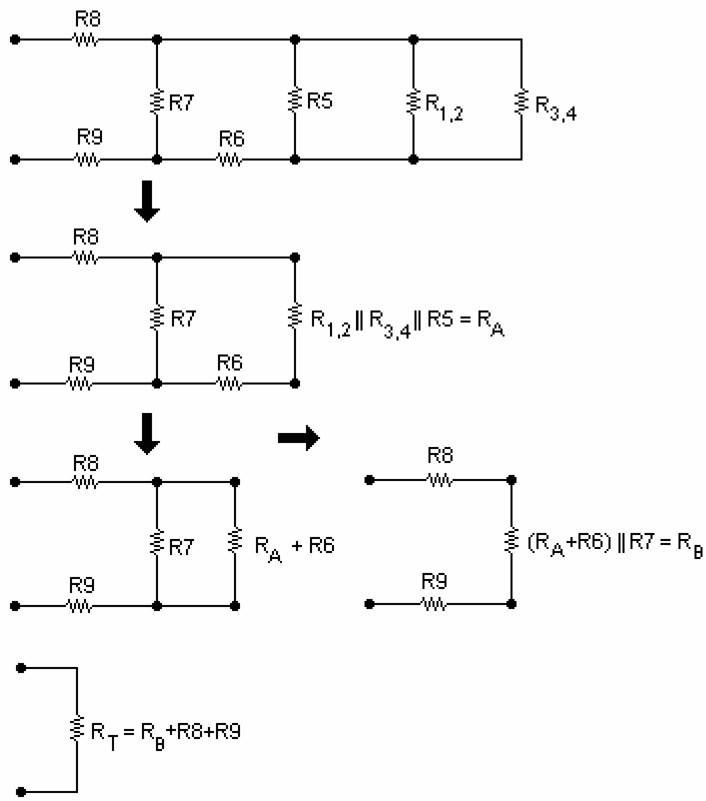
a) *a* y *b* están en circuito abierto; use reducción serie-paralelo.

b) *a* y *b* están en corto circuito; use reducción serie-paralelo.

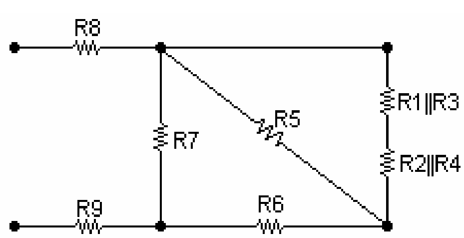


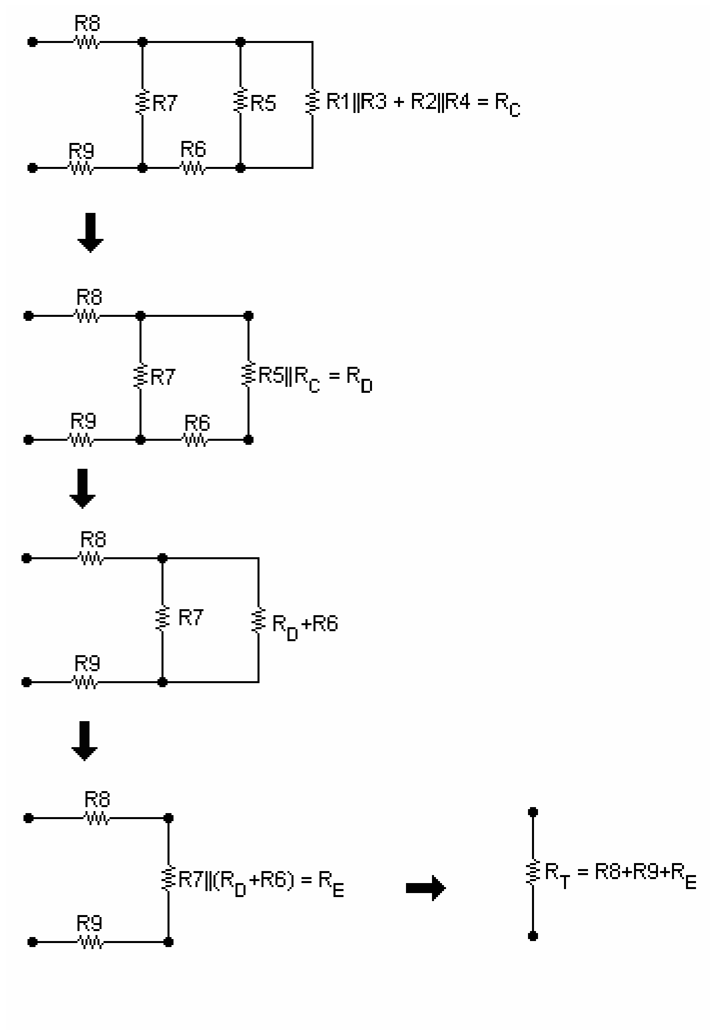
Solución:

a)


R8
R7
R5
$R_{1,2}$
$R_{3,4}$
R9
R6
R8
R7
$R_{1,2} \| R_{3,4} \| R5 = R_A$
R9
R6
R8
R7
$R_A + R6$
R9
R8
$(R_A+R6) \| R7 = R_B$
R9
$R_T = R_B+R8+R9$

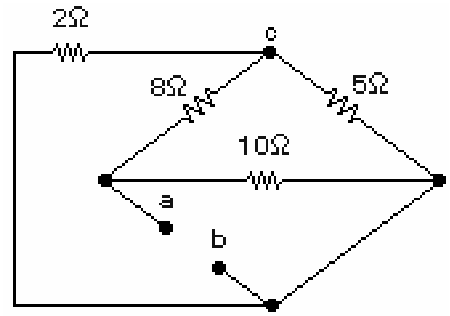
b)


R8
R7
R5
R1||R3
R2||R4
R9
R6

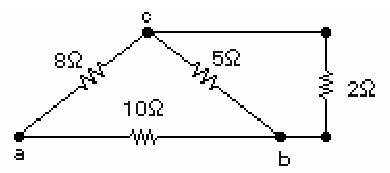


PROBLEMA 5

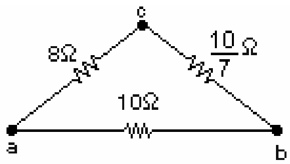
En el siguiente circuito calcule $\boldsymbol{R_{ab}}$.



Solución: En este problema es fácil ver que un extremo del resistor de 5Ω es el punto *b*, por lo que el circuito puede dibujarse como:

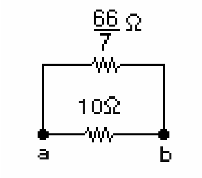


este circuito se puede reducir a:



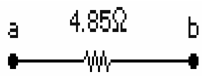
donde 10/7 es el paralelo de los resistores de 5Ω y 2Ω: 5||2=10/7 quedando 8Ω en serie con (10/7)Ω:

$$8+(10/7) = 56/7 + 10/7 = 66/7$$



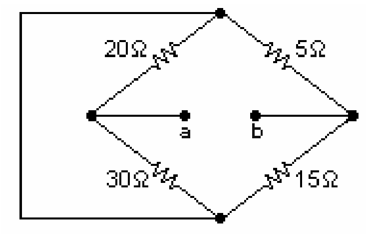
el resistor equivalente es:

$$R_{ab} = 66/7 \parallel 10 = 4.85\ \Omega$$

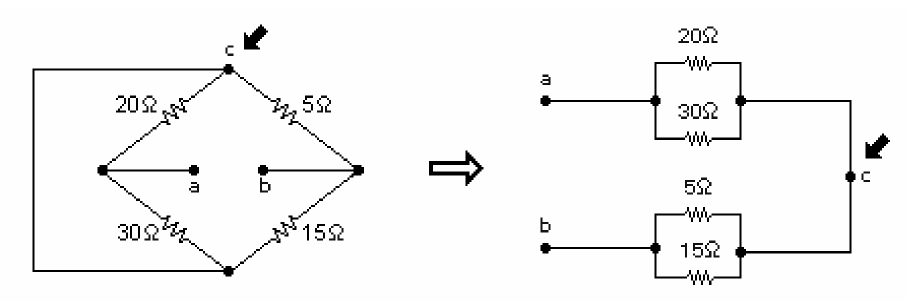


PROBLEMA 6

Calcule R_{ab} en el siguiente circuito.



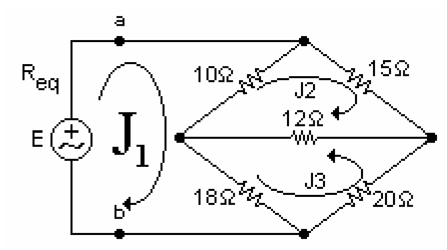
Solución: Para resolver este tipo de problemas podemos auxiliarnos de un punto o puntos exteriores y rehacer el circuito observando qué elementos se encuentran conectados entre los puntos de referencia:



$$R_{ab} = \frac{(20)(30)}{20+30} + \frac{(5)(15)}{5+15} = 15.75\Omega$$

PROBLEMA 7

Calcule $\boldsymbol{R_{eq}}$ entre las terminales ***a*** y ***b***.



Solución:

$Z_{11} = 28$

$Z_{22} = 37$

$Z_{33} = 50$

$Z_{12} = -10$

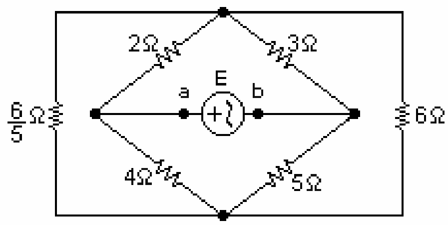
$Z_{13} = 18$

$Z_{23} = 12$

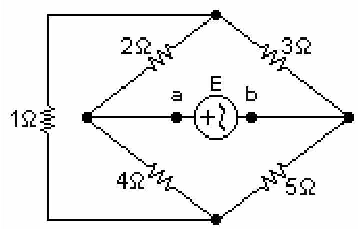
$$R_{eq} = \frac{det\, Z_{m,r}}{cof\, Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 28 & -10 & 18 \\ -10 & 37 & 12 \\ 18 & 12 & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 37 & 12 \\ 12 & 50 \end{vmatrix}} = 15.50\Omega$$

PROBLEMA 8

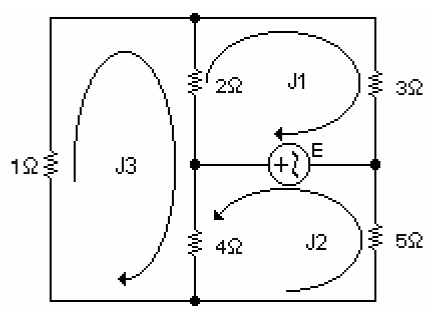
En el siguiente circuito calcule Z_{ab}:



Solución: Este problema puede resolverse a partir de 4 mallas, sin embargo las dos resistencias de la periferia están en paralelo y pueden reducirse a una sola:



o si se desea darle la forma siguiente:



$$Z_{ab} = \frac{E}{J_1 + J_2}$$

Aplicando el método de mallas para encontrar J_1 y J_2:

$$Z_{11} = 5 \qquad Z_{12} = 0$$

$$Z_{22} = 9 \qquad Z_{13} = -2$$

$$Z_{33} = 7 \qquad Z_{23} = 4$$

$$5J_1 + 0J_2 - 2J_3 = E$$

$$0J_1 + 9J_2 + 4J_3 = E$$

$$-2J_1 + 4J_2 + 7J_3 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 199$$

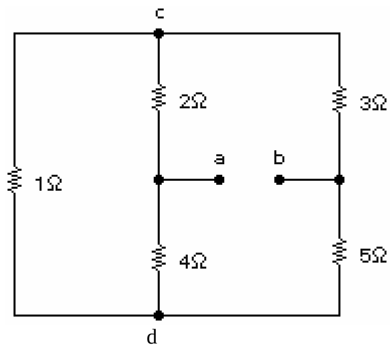
$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & 0 & -2 \\ E & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{199} = \frac{39E}{199}$$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & E & -2 \\ 0 & E & 4 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{199} = \frac{23E}{199}$$

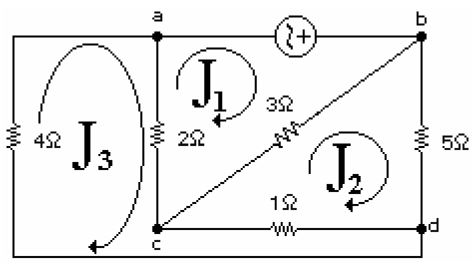
$$Z_{ab} = \frac{E}{J_1 + J_2} = \frac{E}{\frac{39E}{199} + \frac{23E}{199}} = 3.2\Omega$$

PROBLEMA 9

Calcule la impedancia total entre las terminales ***a*** y ***b*** del siguiente circuito:



Solución: Este circuito puede configurarse de la forma que se muestra tomando los puntos *a*, *b*, *c* y *d* como referencia:



$Z_{11} = 5$

$Z_{22} = 9$

$Z_{33} = 7$

$Z_{12} = -3$

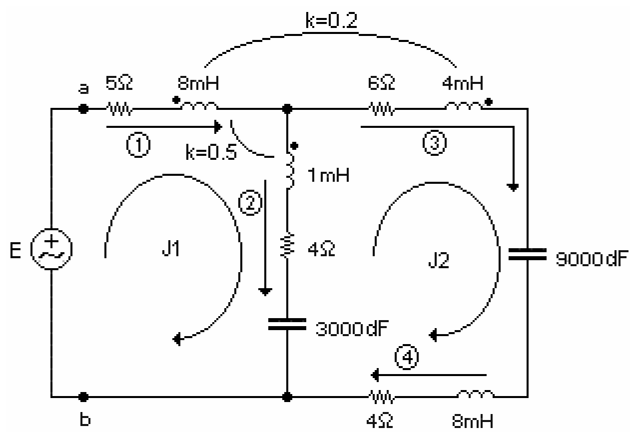
$Z_{13} = -2$

$Z_{23} = -1$

$$Z_{ab} = \frac{\det Z_{m,r}}{cof\ Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{199}{62} = 3.2\Omega$$

PROBLEMA 10

Encuentre la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** de la red dada, a la frecuencia $\omega=10^3$ *rad/seg*.



Solución: Obtendremos L_{12} y L_{13} de la ecuación para el coeficiente de acoplamiento entre dos bobinas:

$$k = \frac{L_{kl}}{\sqrt{L_k L_l}} \therefore L_{kl} = k\sqrt{L_k L_l}$$

De acuerdo con las marcas de polaridad:

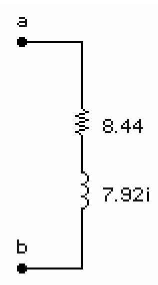
$$L_{12}>0$$
$$L_{13}<0$$

$$L_{12} = 0.5\sqrt{8x10^{-3}\,x10^{-3}} = 1.41x10^{-3}\,Hy$$
$$L_{13} = -0.2\sqrt{8x10^{-3}\,x4x10^{-3}} = -1.13x10^{-3}\,Hy$$

$$Z_{11} = 9 + i(10^3)(9x10^{-3}) + \frac{(3x10^3)}{i10^3} + 2i(10^3)(1.41x10^{-3}) = 9 + 8.82i$$
$$Z_{22} = 14 + i(10^3)(13x10^{-3}) + \frac{3x10^3}{i10^3} + \frac{9x10^3}{i10^3} = 14 + i$$
$$Z_{12} = -4 - i(10^3\,x10^{-3}) - \frac{3x10^3}{ix10^3} - i10^3(1.41x10^{-3}) + i10^3(-1.13x10^{-3}) = -4 - 0.54i$$

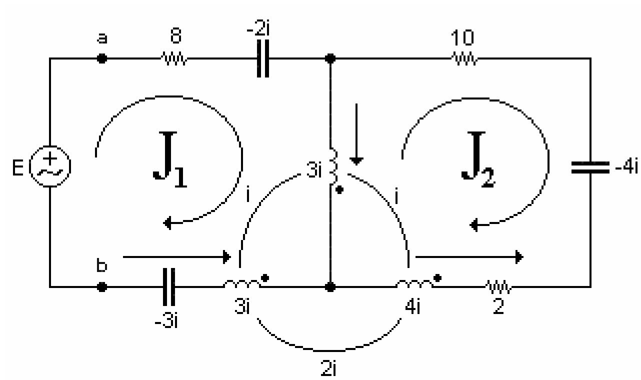
$$Z_{eq} = \frac{\det Z_{m,r}}{cof\ Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 9+8.82i & -4-0.54i \\ -4-0.54i & 14+i \end{vmatrix}}{14+i} = \frac{110.29+119.34i}{14+i} = 8.44+7.92i \quad \Omega$$

El circuito original queda reducido a la siguiente forma:



PROBLEMA 11

Calcule la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b**:*



Solución: Los sentidos de las bobinas fueron asignados de forma tal que fueran congruentes con el signo positivo de cada una de las impedancias mutuas. Una impedancia mutua positiva conlleva una inductancia mutua positiva.

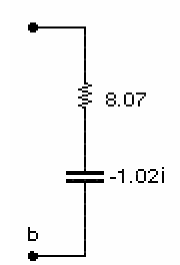
$$Z_{11} = 8 - 5i + 6i - 2i = 8 - i$$

$$Z_{22} = 12 - 4i + 7i + 2i = 12 + 5i$$

$$Z_{12} = -3i + i - i + 2i = -i$$

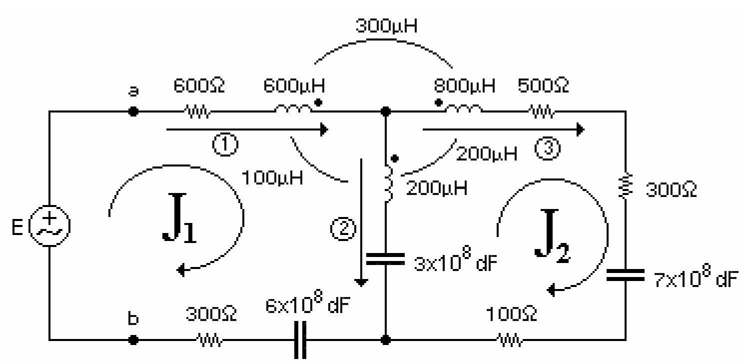
$$Z_{eq} = \frac{det\, Z_{m,r}}{cof\; Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8-i & -i \\ -i & 12+5i \end{vmatrix}}{12+5i} = \frac{102+28i}{12+5i} = 8.07 - 1.02i \quad \Omega$$

La impedancia equivalente es:



PROBLEMA 12

Calcule las impedancias propias y mutuas de mallas, que permitan encontrar la Z_{eq} de la red mostrada, a una frecuencia angular de 10^6 *rad/seg*.



Solución:

$L_{12} < 0 = -10^{-4}$ Hy
$L_{13} < 0 = -3x10^{-4}$ Hy
$L_{23} > 0 = 2x10^{-4}$ Hy

$$Z_{11} = 900 + \frac{6x10^8 + 3x10^8}{ix10^6} + i(10^6)(6x10^{-4} + 2x10^{-4}) + 2(i)(10^6)(-10^{-4}) = 900 - 3x10^2 i$$

$$Z_{22} = 900 + \frac{3x10^8 + 7x10^8}{ix10^6} + i(10^6)(2x10^{-4} + 8x10^{-4}) - 2(i)(10^6)(2x10^{-4}) = 900 - 4x10^2 i$$

$$Z_{12} = -\frac{3x10^8}{ix10^6} - i(10^6)(2x10^{-4}) - i(10^6)(-10^{-4}) + i(10^6)(2x10^{-4}) + i(10^6)(-3x10^{-4}) = 100i$$

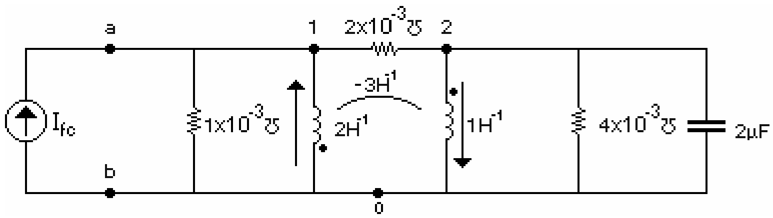
Si se prefiere obtener el circuito transformado, de acuerdo con los sentidos asignados arbitrariamente a los elementos, las impedancias mutuas entre elementos son:

$Z_{12} = i10^6(-10^{-4}) = -100i$
$Z_{13} = i10^6(-3x10^{-4}) = -300i$
$Z_{23} = i10^6(2x10^{-4}) = 200i$

y las impedancias de mallas se obtienen como las ecuaciones de arriba lo indican.

PROBLEMA 13

Encuentre las admitancias propias y mutuas de nodos de la red mostrada que permitan calcular la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b***, a la frecuencia $\omega = 10^3$ *rad/seg*.



Solución: Se conecta una fuente de corriente I_{fc} entre las terminales *a* y *b*. Se tendrá la terminal "*a*" conectada al nodo 1 y la terminal "*b*" a la base de la componente. Se observa que por tener una invertancia mutua negativa la inductancia mutua ha de ser positiva, por lo que el sentido de los elementos es el que se muestra.

La fórmula que se aplica es:

$$Y_{ab} = \frac{det\ y_{n,p}}{cof\ y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}}{y_{22}}$$

Cálculo de las admitancias de nodos:

$$y_{11} = 10^{-3} + \frac{2}{i10^3} + 2x10^{-3} = 3x10^{-3} - 2x10^{-3}i$$

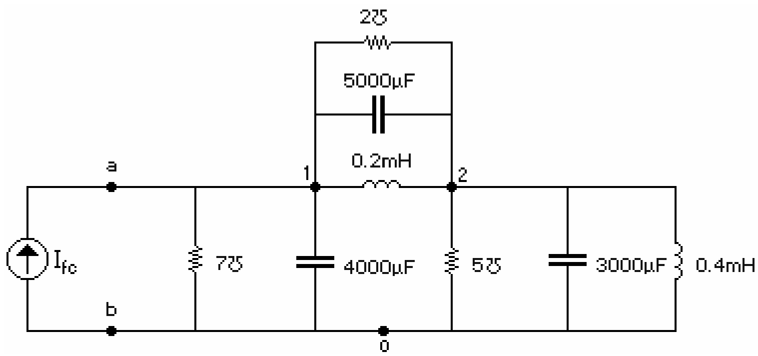
$$y_{22} = 4x10^{-3} + 2x10^{-3} + \frac{1}{i10^3} + i(10^3)(2x10^{-6}) = 6x10^{-3} + 10^{-3}i$$

$$y_{12} = -2x10^{-3} - \left(\frac{-3}{i10^3}\right) = -2x10^{-3} - 3x10^{-3}i$$

Se sustituyen valores en Y_{ab}.

PROBLEMA 14

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** en el circuito mostrado, a la frecuencia $\omega=10^3$ *rad/seg*.



Solución: La terminal "*a*" deberá ser el nodo 1, donde se conecte la fuente de corriente.

$$Y_{ab}=\frac{\det\ y_{n,p}}{cof\ \ y_{11}}=\frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}}{y_{22}}$$

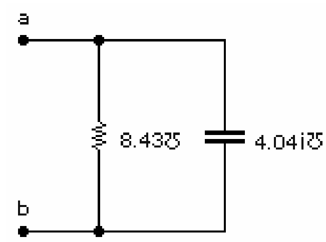
$$y_{11}=7+2+i(10^3)(4000x10^{-6})+i(10^3)(5000x10^{-6})+\frac{1}{i(10^3)(0.2x10^{-3})}=9+4i$$

$$y_{22}=5+2+i(10^3)(5000x10^{-6})+i(10^3)(3000x10^{-6})+\frac{1}{i(10^3)(0.2x10^{-3})}+\frac{1}{i(10^3)(0.4x10^{-3})}=7+0.5i$$

$$y_{12}=-2-i(10^3)(5000x10^{-6})-\frac{1}{i(10^3)(0.2x10^{-3})}=-2$$

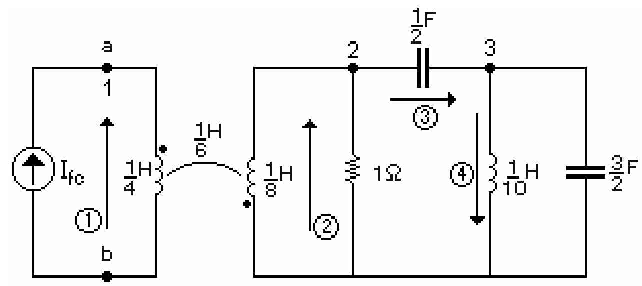
$$Y_{ab}=\frac{\begin{vmatrix} 9+4i & -2 \\ -2 & 7+0.5i\end{vmatrix}}{7+0.5i}=\frac{57+32.5i}{7+0.5i}=8.43+4.04i$$

Este resultado significa que la red original es equivalente a:



PROBLEMA 15

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b***, a la frecuencia ω=2 *rad/seg*.



Solución:

$$L_{12} = -\frac{1}{6} Hy$$

$$Y_{ab} = \frac{\det\ y_{n,p}}{cof\ \ y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}$$

Calcularemos las admitancias propias y mutuas de nodos:

$$y_{11} = \frac{\Gamma_1}{i\omega}$$

$$y_{22} = G_2 + i\omega C_3 + \frac{\Gamma_2}{i\omega}$$

$$y_{33} = i\omega(C_3 + C_4) + \frac{\Gamma_4}{i\omega}$$

$$y_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{i\omega}$$

$$y_{13} = 0$$

$$y_{23} = -i\omega C_3$$

Se requiere conocer el valor de Γ_1, Γ_2, Γ_4 y Γ_{12}. Procederemos a calcular el valor de estas invertancias mediante la siguiente fórmula:

$$\Gamma_{kl} = \frac{cof\, L_{kl}}{det\, L_{kl}} = \frac{cof\, L_{kl}}{\Delta}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32} - \frac{1}{36}} = 36 \quad Yrnehs$$

$$\Gamma_{22} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{1152}} = 72 \quad Yrnehs$$

$$\Gamma_{12} = \frac{-\left(-\frac{1}{6}\right)}{\frac{4}{1152}} = 48 \quad Yrnehs$$

Al sustituir valores:

$$y_{11} = \frac{36}{2i} = -18i$$

$$y_{22} = 1 + i(2)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{72}{2i} = 1 - 35i$$

$$y_{33} = i(2)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{10}{2i} = -i$$

$$y_{12} = \frac{48}{2i} = -24i$$

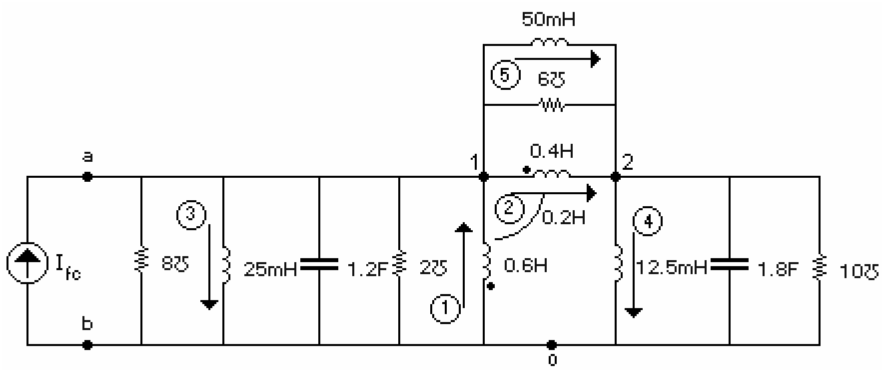
$$y_{13} = 0$$

$$y_{2,3} = -i(2)\left(\frac{1}{2}\right) = -i$$

$$Y_{ab} = \frac{\begin{vmatrix} -18i & -24i & 0 \\ -24i & 1-35i & -i \\ 0 & -i & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-35i & -i \\ -i & -i \end{vmatrix}} = \frac{-18+36i}{-34-i} = 0.497 - 1.073i$$

PROBLEMA 16

Encuentre la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** en el circuito mostrado, a la frecuencia ω=10 *rad/seg*.



Solución: Se asignan sentidos arbitrarios a las dos bobinas acopladas para determinar L_{12} = + 0.2Hy. Calcularemos primeramente las invertancias propias y mutua de las dos bobinas acopladas 1 y 2 ya que dichas invertancias se necesitarán para poder calcular las admitancias.

$$\Gamma_{kl} = \frac{cof\ L_{kl}}{\Delta}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{cof\ L_{11}}{\Delta} = \frac{0.4}{\begin{vmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{vmatrix}} = \frac{0.4}{0.2} = 2 \ \ Yrnehs$$

$$\Gamma_{22} = \frac{cof\ L_{22}}{\Delta} = \frac{0.6}{0.2} = 3 \ \ Yrnehs$$

$$\Gamma_{12} = \frac{cof\ L_{12}}{\Delta} = \frac{-0.2}{0.2} = -1 \ \ Yrneh$$

Las admitancias propias de los elementos son:

$$Y_1 = \frac{\Gamma_{11}}{i\omega} = \frac{2}{i(10)} = -0.2i$$

$$Y_2 = \frac{\Gamma_{22}}{i\omega} = \frac{3}{i(10)} = -0.3i$$

$$Y_3 = 8 + 2 + i(10)(1.2) + \frac{\frac{1}{25x10^{-3}}}{i10} = 10 + 8i$$

$$Y_4 = 10 + i(10)(1.8) + \frac{\frac{1}{12.5x10^{-3}}}{i10} = 10 + 10i$$

$$Y_5 = 6 + \frac{\frac{1}{50x10^{-3}}}{i10} = 6 - 2i$$

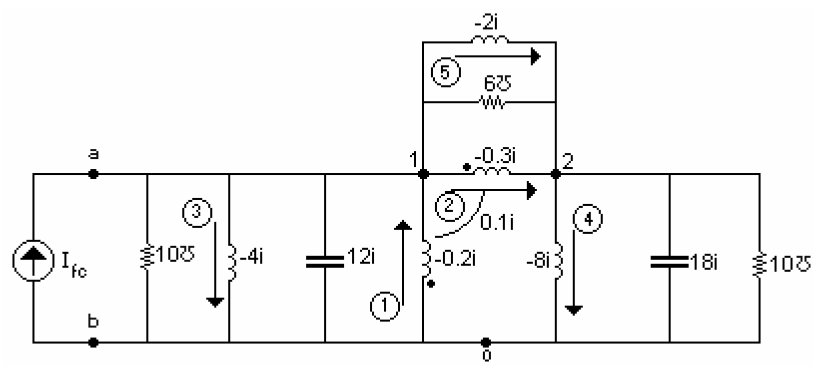
La admitancia mutua entre el elemento 1 y el elemento 2 se calcula mediante

$$Y_{kl} = \frac{\Gamma_{kl}}{i\omega}$$

$$Y_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{i\omega} = \frac{-1}{10i} = 0.1i$$

Obsérvese que la invertancia Γ_{12} es de signo contrario a la inductancia L_{12}.

Podemos representar el circuito original mediante admitancias, obteniendo:



Las admitancias de nodos son:

$$y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5 - 2Y_{12} = -0.2i - 0.3i + 10 + 8i + 6 - 2i - 2(0.1i) = 16 + 5.3i$$

$$y_{22} = Y_2 + Y_4 + Y_5 = -0.3i + 10 + 10i + 6 - 2i = 16 + 7.7i$$

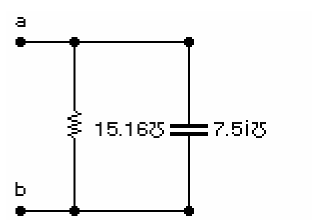
$$y_{12} = -Y_2 - Y_5 + Y_{12} = -(-0.3i) - 6 + 2i + 0.1i = -6 + 2.4i$$

Aplicando la fórmula general:

$$Y_{ab} = \frac{det \; y_{n,p}}{cof \; y_{11}}$$

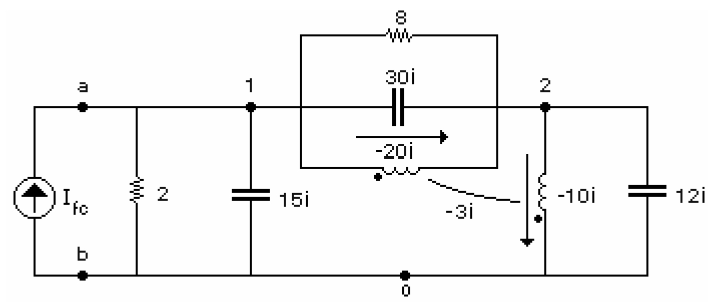
$$Y_{ab} = \frac{\begin{vmatrix} 16+5.3i & -6+2.4i \\ -6+2.4i & 16+7.7i \end{vmatrix}}{16+7.7i} = \frac{184.95+236.8i}{16+7.7i} = \frac{300.46\angle 52°}{17.75\angle 25.69°} = 16.92\angle 26.31^{o} = 15.16+7.5i$$

Lo que significa que la admitancia total equivale al siguiente elemento paralelo:



PROBLEMA 17

Calcule $\boldsymbol{Y_{ab}}$ en el circuito mostrado.



Solución: De acuerdo con las marcas de polaridad, los sentidos de los elementos acoplados que se muestran cumplen con $L_{kl} < 0$, lo que origina una invertancia mutua positiva y, consecuentemente, una admitancia mutua negativa:

recordar que $Y_{kl} = \dfrac{\Gamma_{kl}}{i\omega} = -\dfrac{(\Gamma_{kl})}{\omega} i$.

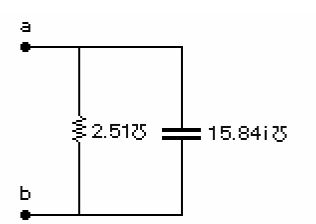
$$y_{11} = 2 + 8 + 15i + 30i - 20i = 10 + 25i$$

$$y_{22} = 8 + 30i + 12i - 20i - 10i - 2(-3i) = 8 + 18i$$

$$y_{12} = -8 - 30i + 20i + (-3i) = -8 - 13i$$

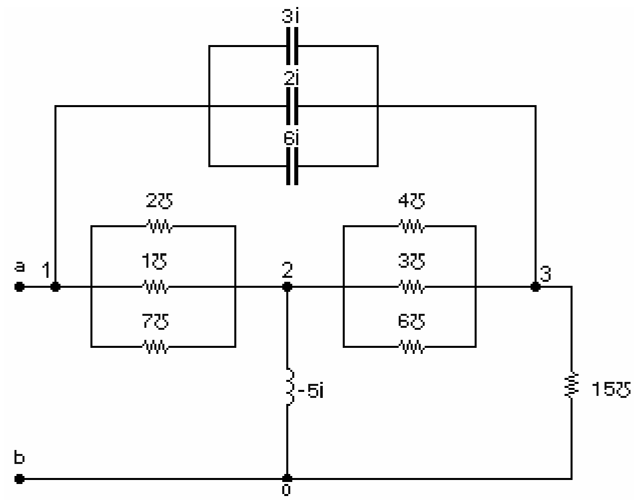
$$Y_{ab} = \frac{det\ y_{n,p}}{cof\ y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 10+25i & -8-13i \\ -8-13i & 8+18i \end{vmatrix}}{8+18i} = \frac{-265+172i}{8+18i} = 2.51 + 15.84i$$

El circuito original queda reducido a la siguiente forma:

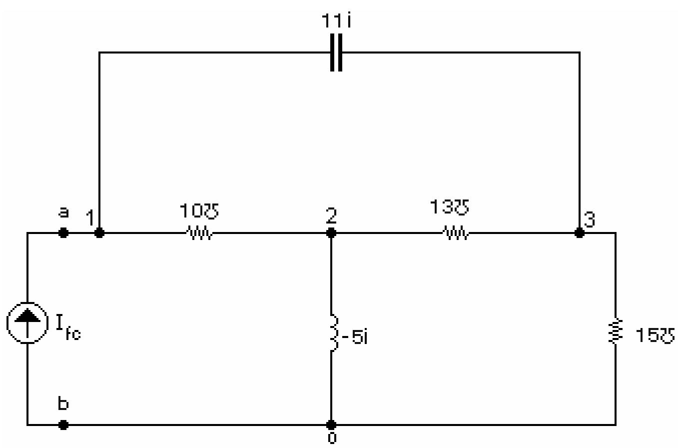


PROBLEMA 18

Encuentre las admitancias de nodos de la red mostrada que permitan calcular la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b.***



Solución: Podemos reducir el circuito utilizando reducción serie-paralelo entre conductancias y capacitores.



En este circuito no es posible aplicar reducción serie-paralelo, por lo que aplicaríamos la fórmula general ya conocida:

$$y_{11} = 10 + 11i$$

$$y_{22} = 10 + 13 - 5i = 23 - 5i$$

$$y_{33} = 28 + 11i$$

$$y_{12} = -10$$

$$y_{13} = -11i$$

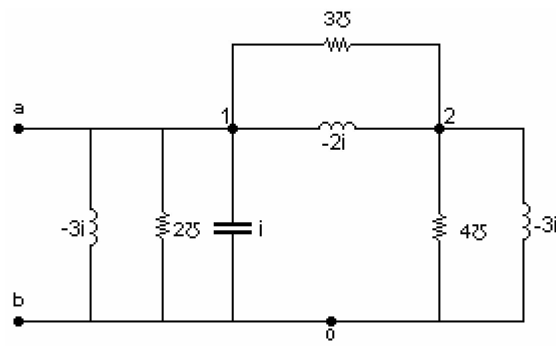
$$y_{23} = -13$$

$$Y_{ab} = \frac{\det \; y_{n,p}}{\operatorname{cof} \; y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}}$$

PROBLEMA 19

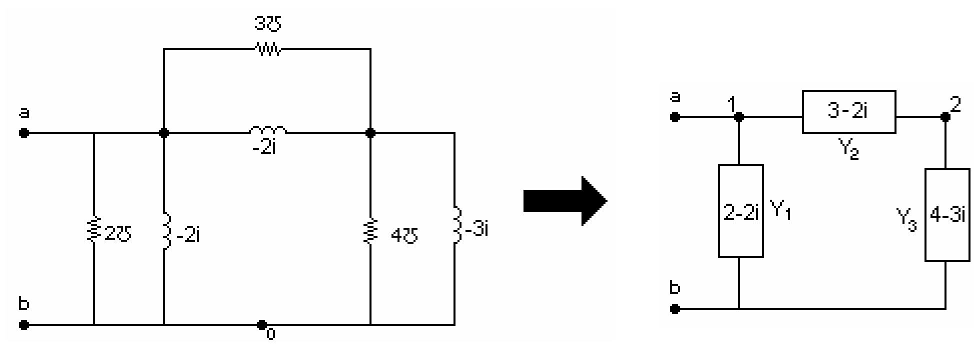
Encuentre la admitancia $\boldsymbol{Y_{ab}}$ *del circuito mostrado:*

a) Por reducción serie-paralelo.
b) Aplicando la fórmula general.



Solución:

a)



Puede observarse que la admitancia de 3-2*i* está en serie con la de 4-3*i*.

$$Y_{ab} = Y_1 + \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3}$$

$$\frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3} = \frac{(3-2i)(4-3i)}{3-2i+4-3i} = \frac{6-17i}{7-5i} = 1.71 - 1.2i$$

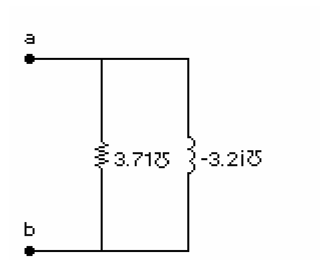
$$Y_{ab} = Y_1 + \frac{Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3} = 2-2i+1.71-1.2i = 3.71-3.2i$$

b)

$$y_{11} = 5 - 4i$$
$$y_{22} = 7 - 5i$$
$$y_{12} = -3 + 2i$$

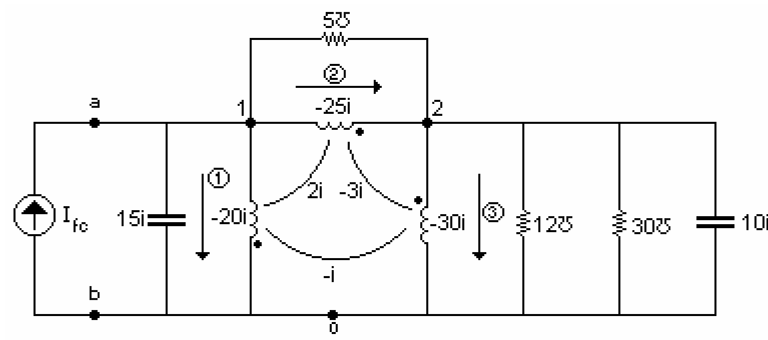
$$Y_{ab} = \frac{det \ y_{n,p}}{cof \ y_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 5-4i & -3+2i \\ -3+2i & 7-5i \end{vmatrix}}{7-5i} = \frac{10-41i}{7-5i} = 3.71 - 3.20i$$

El circuito original queda reducido a la siguiente forma:



PROBLEMA 20

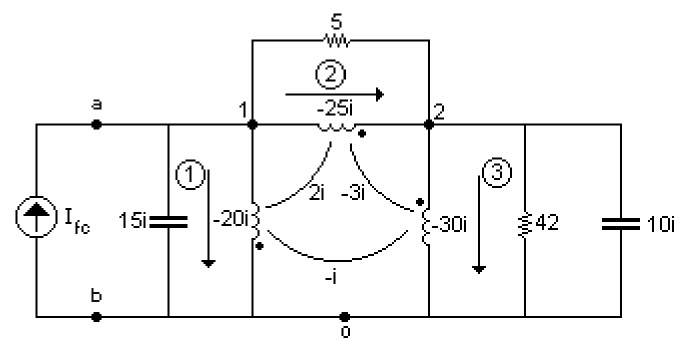
Calcule las admitancias propias y mutuas de nodos, que permitan encontrar la $\boldsymbol{Y_{ab}}$ en el circuito dado.



Solución: Las admitancias propias y mutuas son datos. Según las marcas de polaridad dadas, los sentidos que se asignan a las bobinas acopladas cumplen con lo siguiente: si $\Gamma_{kl} > 0$ se tendrá una $L_{kl} < 0$ y viceversa.

Recordar que: $$Y_{kl} = \frac{\Gamma_{kl}}{i\omega} = -\frac{(\Gamma_{kl})i}{\omega}$$

Se puede observar que las dos conductancias laterales pueden ser reducidas a una:



$$y_{11} = 5 + 15i - 20i - 25i + 2(2i) = 5 - 26i$$

$$y_{22} = 5 + 42 + 10i - 30i - 25i - 2(-3i) = 47 - 39i$$

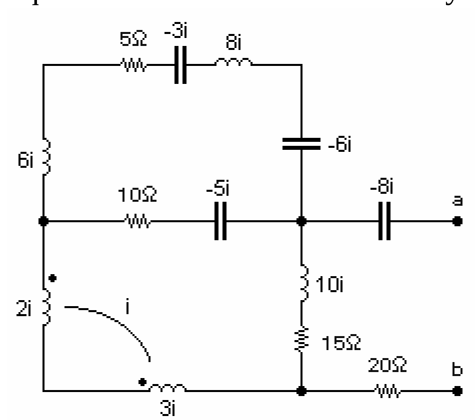
$$y_{12} = -5 - (-25i) - (2i) + (-3i) + (-i) = -5 + 19i$$

La Y_{ab} se obtendría aplicando la fórmula general: $$Y_{ab} = \frac{\det\ y_{n,p}}{cof\ \ y_{11}}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

PROBLEMA 1

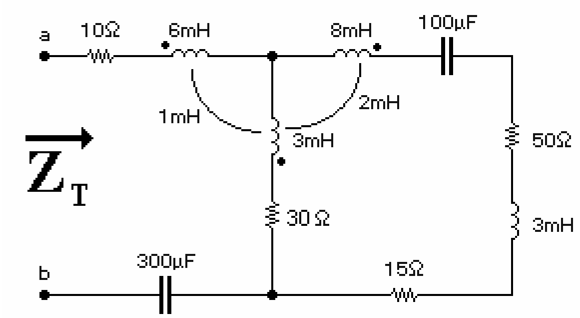
Calcule la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** de la red mostrada:



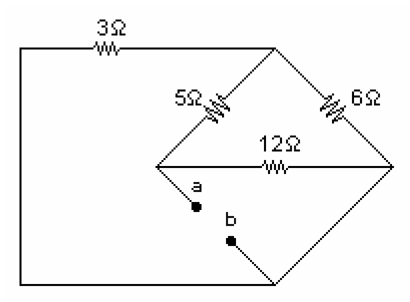
PROBLEMA 2

En la red mostrada calcule:

a) La impedancia total Z_T a la frecuencia angular $\omega=10^3$ *rad/seg*.
b) El valor del inductor o capacitor equivalente.



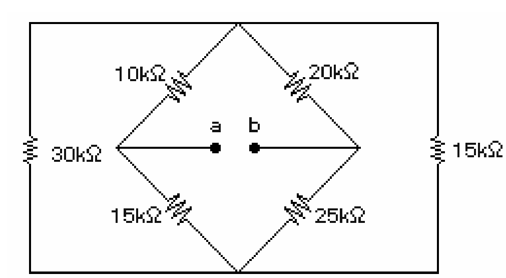
PROBLEMA 3



En el siguiente circuito calcule R_{ab}.

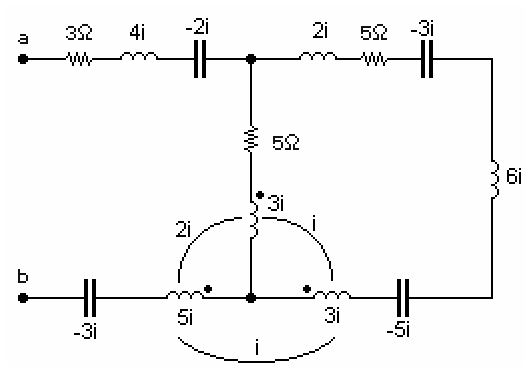
PROBLEMA 4

En el siguiente circuito calcule R_{ab}.



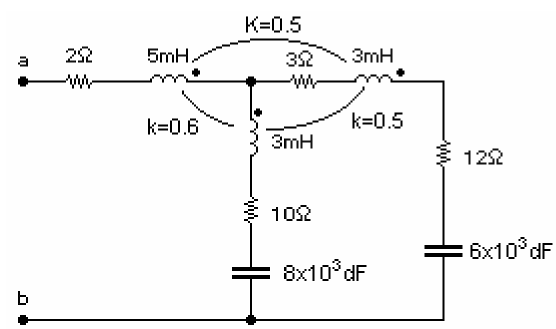
PROBLEMA 5

Calcule la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b***.



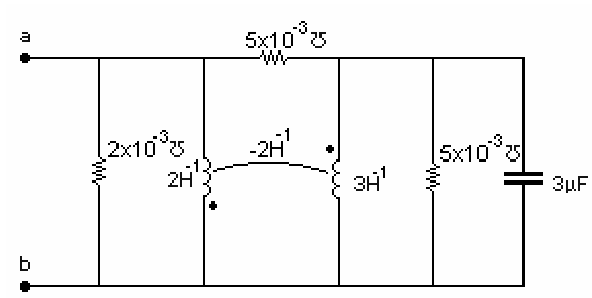
PROBLEMA 6

Encuentre la impedancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** en la red mostrada a la frecuencia $\omega=10^3$ *rad/seg*.



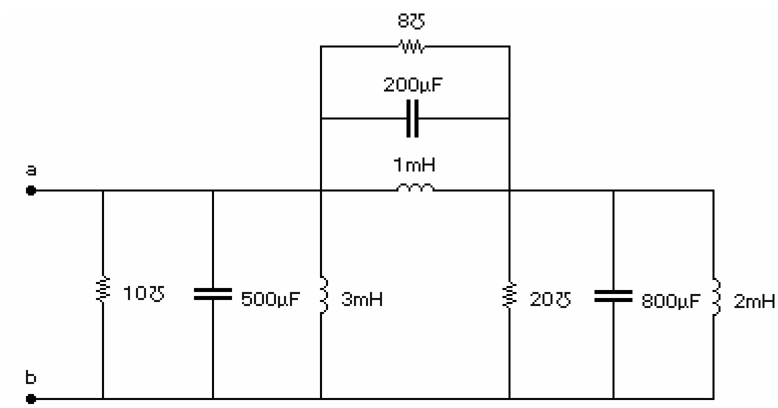
PROBLEMA 7

Encuentre las admitancias propias y mutuas de nodos de la red mostrada que permitan calcular la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** a la frecuencia $\omega=10^3$ *rad/seg*.



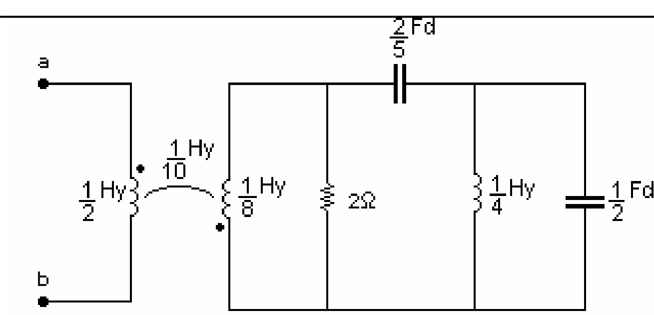
PROBLEMA 8

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** en el circuito mostrado a la frecuencia $\omega=10^3$ *rad/seg*.



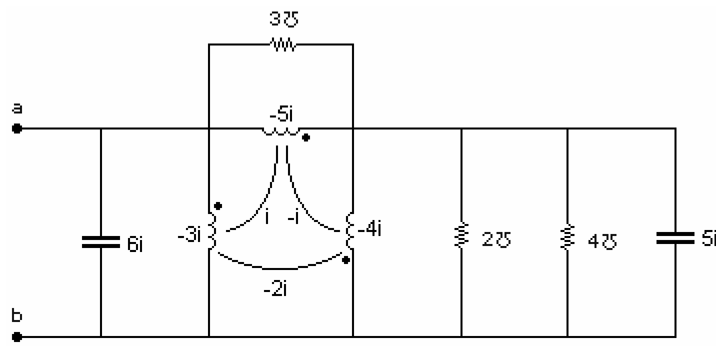
PROBLEMA 9

Calcule la admitancia equivalente entre las terminales ***a*** y ***b*** a la frecuencia $\omega=2$ *rad/seg*.



PROBLEMA 10

Calcule las admitancias propias y mutuas de nodos que permitan encontrar la $\boldsymbol{Y_{eq}}$ en el circuito mostrado.

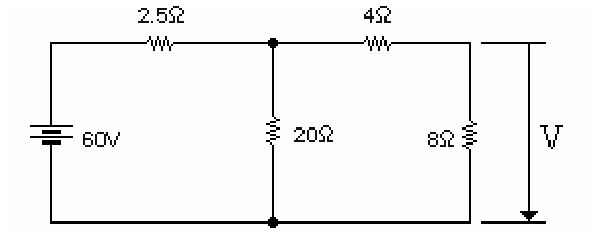


CAPÍTULO II

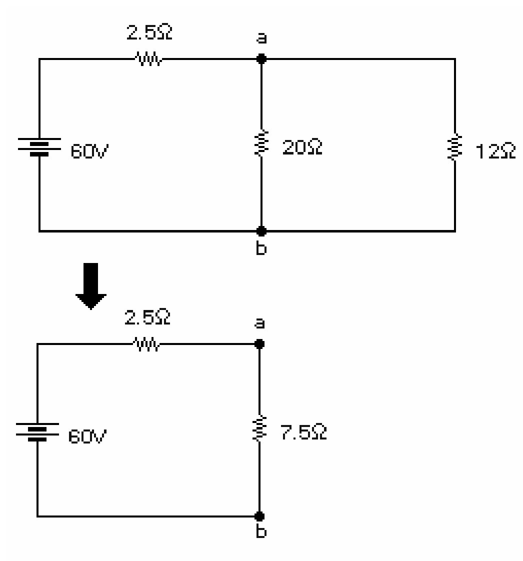
TEOREMAS DE REDES

PROBLEMA 1

Usando dos veces divisor de voltaje calcule *V*.



Solución:

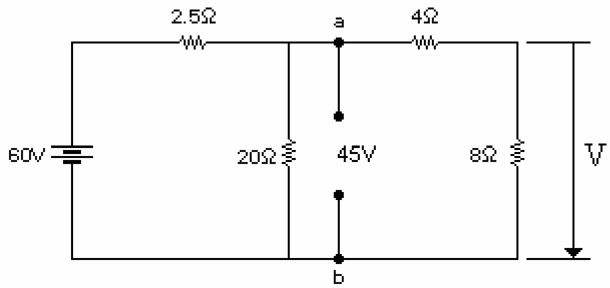


Para calcular el voltaje en la resistencia de 7.5Ω aplicaremos la siguiente fórmula:

$$V_R = \frac{(V_{fv})(R)}{R_T}$$

$$V_{ab} = \frac{(60)(7.5)}{10} = 45 \ \ Volts$$

La siguiente figura muestra el circuito original con la resistencia de 20Ω a la izquierda de *a* y *b*, teniendo entre estos puntos la tensión de 45*V* (fuente aparente).

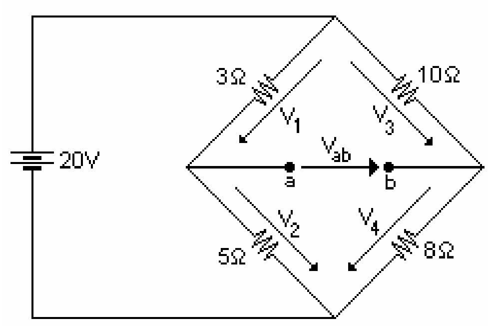


Al aplicar divisor de voltaje en la sección de la derecha se tendrá:

$$V = \frac{8(45)}{8+4} = 30 \quad volts$$

PROBLEMA 2

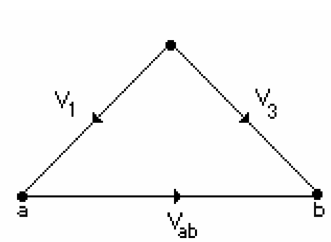
En el siguiente circuito calcule V_{ab} empleando divisor de voltaje.



Solución: Podemos establecer por L. K. V. (ley de Kirchhoff para voltajes):

$$V_1 + V_{ab} - V_3 = 0 \quad \therefore \quad V_{ab} = V_3 - V_1 \quad \text{....................} \quad (1)$$

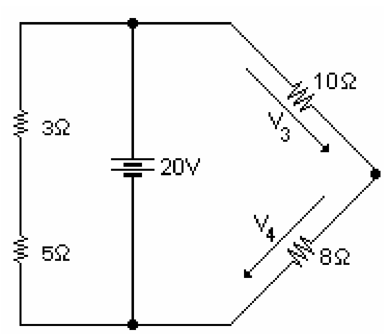
o bien usando el siguiente diagrama:



$$V_1 + V_{ab} = V_3$$

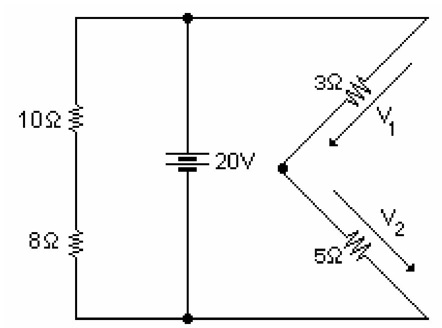
$$\therefore \quad V_{ab} = V_3 - V_1$$

Para calcular V_3 pasemos primeramente la rama que contiene a las resistencias de 3Ω y 5Ω a la izquierda de la fuente de alimentación, lo anterior con objeto de facilitar la visualización del divisor de voltaje.



$$V_3 = \frac{10(20)}{18} = 11.11$$

Para calcular V_1 pasemos ahora la rama que contiene a las resistencias de 10Ω y de 8Ω a la izquierda de la fuente:



$$V_1 = \frac{3(20)}{8} = 7.5 \quad volts$$

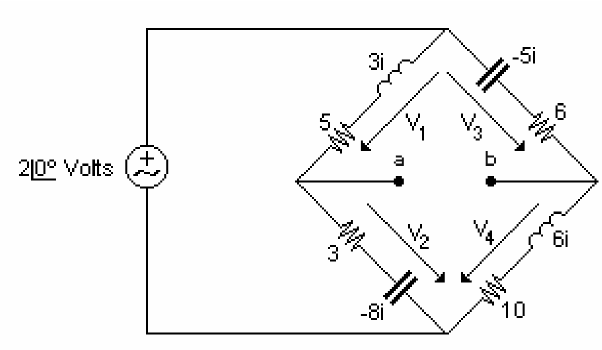
Sustituyendo en (1):

$$V_{ab} = 11.11 - 7.5 = 3.61 \quad volts$$

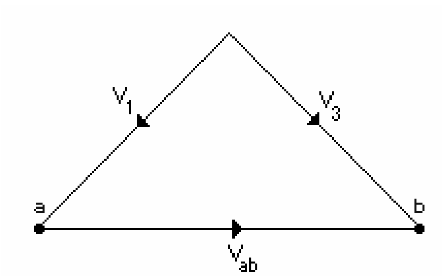
Se sugiere al estudiante comprobar este resultado empleando la trayectoria que involucre a V_2 y V_4.

PROBLEMA 3

En el siguiente circuito encuentre V_{ab} empleando divisor de voltaje.



Solución: Representando las caídas de voltaje V_1, V_3 y V_{ab} mediante el siguiente diagrama, se tendrá:



$$V_1 + V_{ab} = V_3 \quad \therefore \quad V_{ab} = V_3 - V_1$$

$$V_1 = \frac{(5+3i)2}{5+3i+3-8i} = \frac{10+6i}{8-5i} = 0.561 + 1.101i \quad volts$$

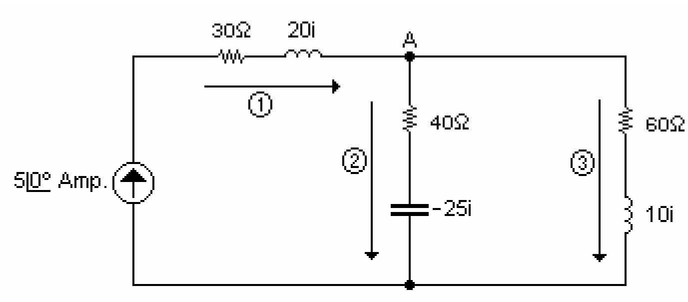
$$V_3 = \frac{(6-5i)2}{6-5i+10+6i} = \frac{12-10i}{16+i} = 0.708 - 0.669i \quad volts$$

Sustituyendo en V_{ab}:

$$V_{ab} = 0.708 - 0.669i - 0.561 - 1.101i = 0.147 - 1.77i = 1.77\underline{|-85.2^{\circ}} \quad volts$$

PROBLEMA 4

Empleando divisor de corriente calcule las corrientes en las ramas 2 y 3. Verifique la ley de Kirchhoff para corrientes en el nodo A.



Solución: La corriente de $5\underline{|0^{\circ}}$ Amp. proveniente de la fuente, se bifurca por las ramas 2 y 3.

Así:

$$I_2 = \frac{Z_3 I_{fc}}{Z_2 + Z_3} = \frac{(60+10i)5}{40-25i+60+10i} = \frac{300+50i}{100-15i} = 2.86 + 0.929i \quad amp.$$

$$I_3 = \frac{Z_2 I_{fc}}{Z_2 + Z_3} = \frac{(40-25i)5}{40-25i+60+10i} = 2.13 - 0.929i \quad amp.$$

Aplicando la ley de Kirchhoff al nodo A:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\therefore I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = 2.86 + 0.929i + 2.13 - 0.929i = 5 \quad amp.$$

PROBLEMA 5

Usando reducción serie-paralelo y divisor de corriente encuentre I_X.

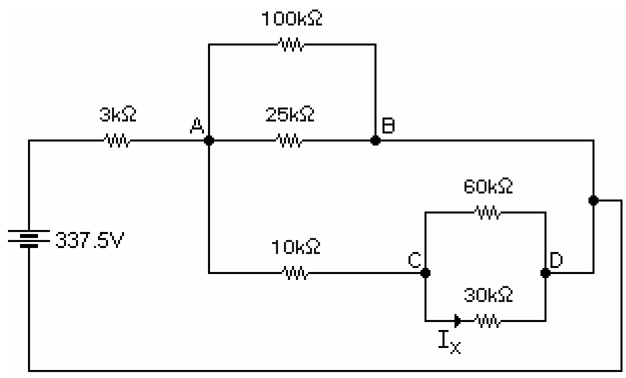


Figura 1

Solución: Reduciendo resistencias en paralelo entre los puntos A, B y C, D:

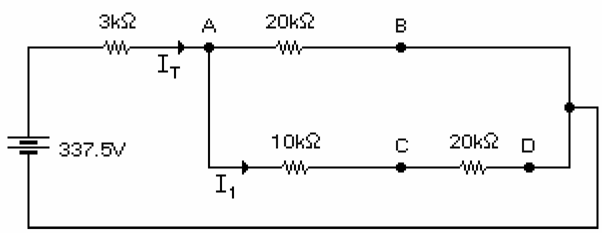


Figura 2

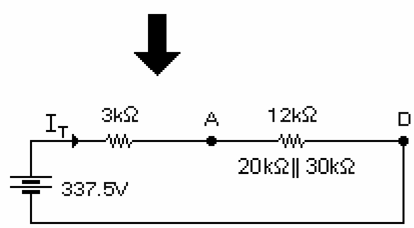


Figura 3

En el circuito de la figura 3 podemos calcular la corriente total I_T.

$$I_T = \frac{337.5}{15k} = 22.5 \quad mA$$

Regresando al circuito de la figura 2, tenemos que la corriente I_T se distribuye por la resistencia de 20kΩ y por la rama que nos interesa (10kΩ en serie con 20kΩ).

En la misma figura 2, aplicando divisor de corriente para calcular I_1:

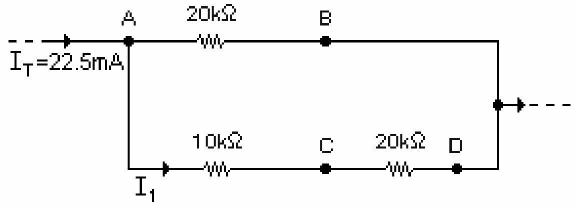
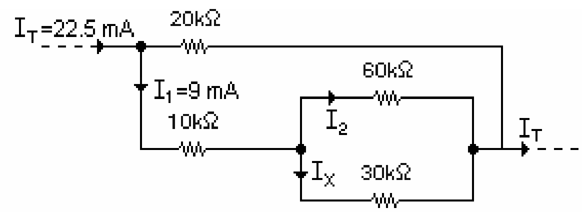


Figura 4

$$I_1 = \frac{(20k)(22.5x10^{-3})}{10k + 20k + 20k} = 9 \quad mA$$

En la figura 4 observamos que la I_1 se distribuye como se muestra:

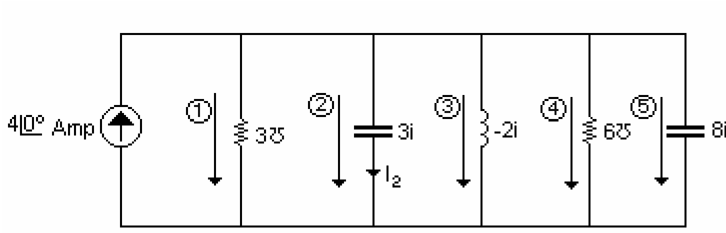


Aplicando nuevamente divisor de corriente se obtiene I_x.

$$I_x = \frac{(60k)(9x10^{-3})}{90k} = 6 \quad mA$$

PROBLEMA 6

Dadas las admitancias de los elementos del circuito mostrado calcule I_2.



Solución: Por divisor de corriente para impedancias sabemos que:

$$I_k = \frac{Z_T}{Z_k} I_{fc}$$

Como nos dan admitancias, podemos sustituir en la fórmula anterior a Z por $\frac{1}{Y}$ con sus respectivos índices:

Sustituyendo $Z = \frac{1}{Y}$

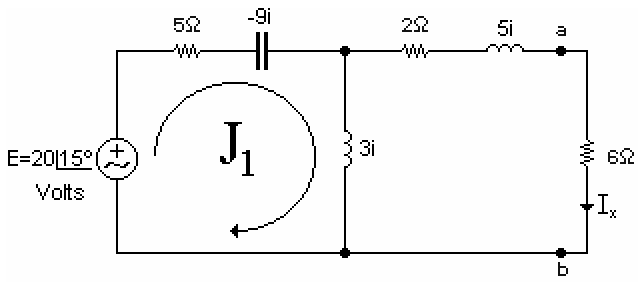
$$I_k = \frac{\frac{1}{Y_T}}{\frac{1}{Y_k}} I_{fc} = \frac{Y_k}{Y_T} I_{fc}$$

donde $Y_k = 3i$ y $Y_T = 3+3i-2i+6+8i$ (por estar en paralelo)
$= 9-9i$

$$I_2 = \left(\frac{3i}{9-9i}\right) 4\underline{|0^\circ} = \frac{12\underline{|90^\circ}}{12.72\underline{|-45^\circ}} = 0.94\underline{|135^\circ} \quad amp.$$

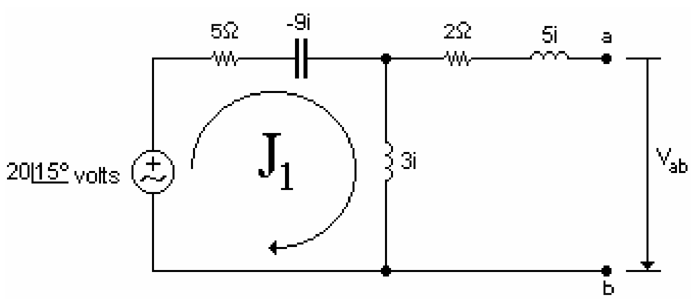
PROBLEMA 7

Aplicando el teorema de Thévenin encuentre la corriente I_x.



Solución:

1. Se separa la parte pasiva (resistor de 6Ω) y se calcula V_{ab}.



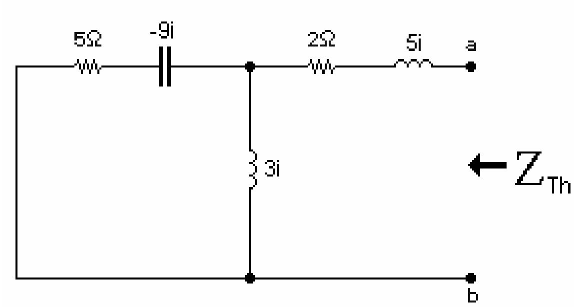
Recordar que por ley de ohm (***V=ZI***) el voltaje en la resistencia de 2Ω y en la bobina de 5*i* es cero debido a que por ellas no circula corriente.

$$J_1 = \frac{V}{Z_T} = \frac{20\angle 15^\circ}{5-6i} = \frac{20\angle 15^\circ}{7.81\angle -50.19^\circ} = 2.56\angle 65.19^\circ \quad amp.$$

$$V_{ab} = 3i\left(2.56\angle 65.19^\circ\right) = 7.68\angle 155.19^\circ \quad volts$$ que es el voltaje de Thévenin.

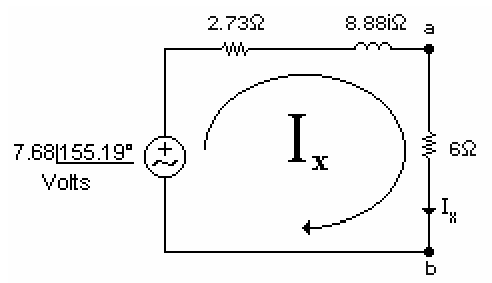
2. Para calcular la impedancia de Thévenin se pacifica la red.

Pacificar una red significa anular sus fuentes de alimentación. Si es una fuente de voltaje se sustituye por un corto circuito y si es una fuente de corriente por un circuito abierto. Así, el circuito pacificado es:



$$Z_{eq} = Z_{Th} = \frac{(5-9i)(3i)}{5-6i} + 2 + 5i = 2.73 + 8.88i\Omega$$

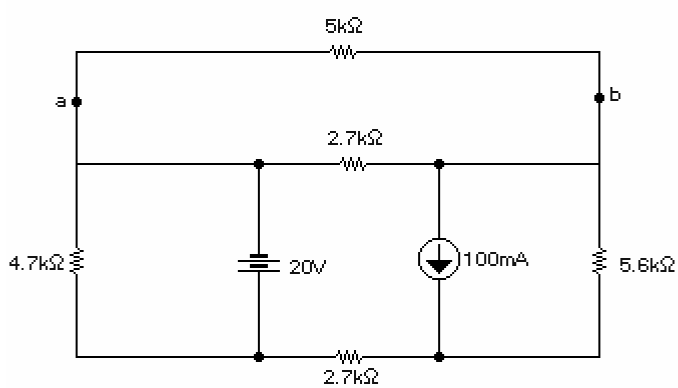
3. Se dibuja el circuito equivalente de Thévenin y se conecta el resistor de 6Ω.



$$I_x = \frac{7.68\angle 155.19^\circ}{8.73 + 8.88i} = 0.61\angle 109.7^\circ \quad amp.$$

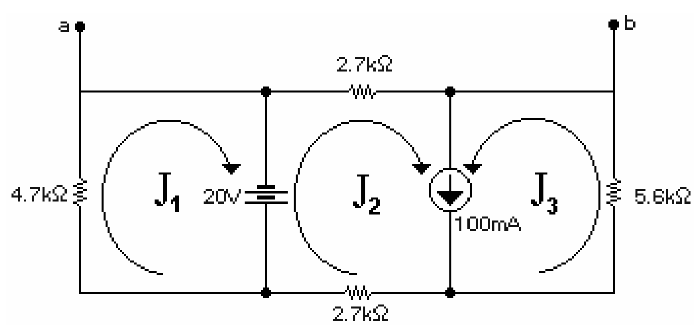
PROBLEMA 8

Aplicando el teorema de Thévenin, calcule la corriente en el resistor de 5kΩ.



Solución: Separando el resistor de 5kΩ y aplicando el método de mallas para calcular el voltaje de Thévenin entre las terminales *a* y *b*, tendremos que:

$$V_{TH} = (2.7K)(J_2)$$



$$4700\,J_1 + 0\,J_2 + 0\,J_3 = 20 \quad \text{................................} \quad (1)$$

$$0\,J_1 + 5400\,J_2 + 0\,J_3 = -20 + D \quad \text{.......................} \quad (2)$$

$$0\,J_1 + 0\,J_2 + 5600\,J_3 = D \quad \text{.................................} \quad (3)$$

$$J_2 + J_3 = 100x10^{-3} \quad Amp \quad \text{..............................} \quad (4)$$

De la ecuación (4) tenemos:

$$J_3 = 100x10^{-3} - J_2$$

De la ecuación (2) tenemos:

$$5400J_2 = -20 + D \Rightarrow D = 5400\ J_2 + 20 \text{ .... (A)}$$

De la ecuación (3) tenemos:

$$5600\left[100x10^{-3} - J_2\right] = D$$
$$560 - 5600\ J_2 = D \text{...................................(B)}$$

Igualando las ecuaciones (A) y (B) tenemos:

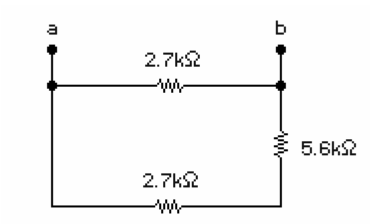
$$5400\ J_2 + 20 = 560 - 5600\ J_2$$

$$11000\ J_2 = 560 – 20$$

$$\therefore \quad J_2 = \frac{540}{11000} = 0.049 \quad amp.$$

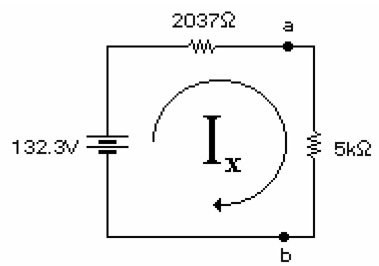
$$V_{Th} = J_2(2700) = (0.049)(2700) = 132.3\ volts$$

Pacificamos la red, a fin de calcular $R_{Th.}$



$$R_{Th} = \frac{8300x2700}{8300+2700} = 2037\Omega$$

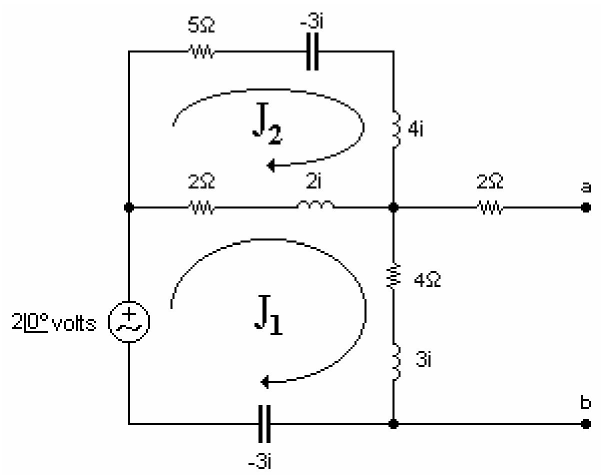
Al circuito equivalente de Thévenin se le conecta el resistor de 5kΩ:



$$I_x = \frac{132.3}{7037} = 18.8 \quad mA$$

PROBLEMA 9

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin entre las terminales *a* y *b*.



Solución:

$$V_{Th} = V_{ab} = J_1(4+3i) = J_1(5\angle 36.86°)$$

$$Z_{11} = 6+2i$$

$$Z_{22} = 7+3i$$

$$Z_{12} = -2-2i$$

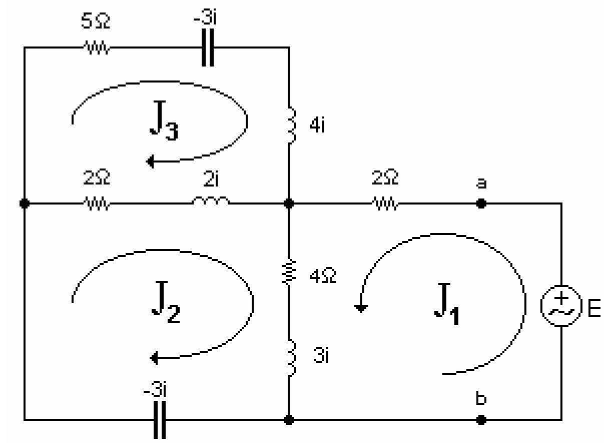
Estableciendo las ecuaciones de mallas:

$$(6+2i)\,J_1 + (-2-2i)\,J_2 = 2$$
$$(-2-2i)\,J_1 + (7+3i)\,J_2 = 0$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2-2i \\ 0 & 7+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6+2i & -2-2i \\ -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}} = \frac{14+6i}{36+24i} = 0.352\angle -10.51° \quad amp.$$

$$V_{Th} = (0.352\angle -10.51°)(5\angle 36.86°) = 1.76\angle 26.35° \quad volts$$

La impedancia de Thévenin se calcula del circuito siguiente:



$Z_{11} = 6 + 3i$

$Z_{22} = 6 + 2i$

$Z_{33} = 7 + 3i$

$Z_{12} = 4 + 3i$

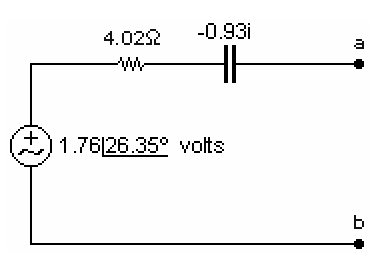
$Z_{13} = 0$

$Z_{23} = -2 - 2i$

$$Z_{eq} = \frac{\det Z_{m,r}}{cof\ Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 6+3i & 4+3i & 0 \\ 4+3i & 6+2i & -2-2i \\ 0 & -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6+2i & -2-2i \\ -2-2i & 7+3i \end{vmatrix}} = \frac{167+63i}{36+24i} = \frac{178.5\angle 20.6^\circ}{43.2\angle 33.7^\circ} = 4.13\angle -13.1^\circ$$

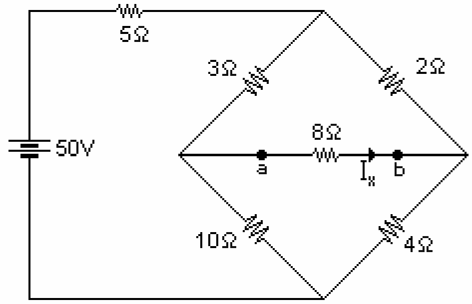
$Z_{eq} = 4.02 - 0.93i\Omega$

El circuito equivalente de Thévenin es:

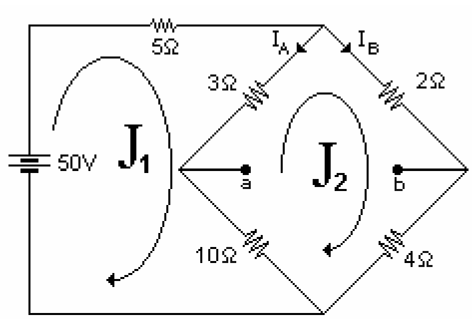


PROBLEMA 10

Utilizando el teorema de Thévenin encuentre la corriente que circula por el resistor de 8Ω.



Solución: Habiendo separado el resistor de 8Ω, se tendrá la malla 2. Habremos de calcular $V_{ab} = V_{Th}$.



Aplicando el método de mallas para encontrar J_1 y J_2:

$$Z_{11} = 18$$

$$Z_{22} = 19$$

$$Z_{12} = -13$$

$$18J_1 - 13J_2 = 50$$
$$-13J_1 + 19J_2 = 0$$

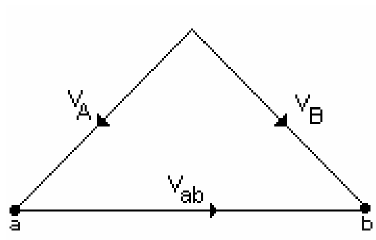
$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -13 \\ 0 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18 & -13 \\ -13 & 19 \end{vmatrix}} = \frac{950}{173} = 5.491 \quad amp.$$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 50 \\ -13 & 0 \end{vmatrix}}{173} = \frac{650}{173} = 3.757 \quad amp.$$

$$I_A = J_1 - J_2 = 5.491 - 3.757 = 1.734 \quad amp.$$

$$I_B = J_2 = 3.757 \quad amp.$$

Representando las caídas de voltaje mediante el siguiente diagrama:



$$V_A + V_{ab} = V_B$$
$$\therefore V_{ab} = V_B - V_A$$

$$V_A = (1.734)(3) = 5.202 \quad volts$$

$$V_B = (3.757)(2) = 7.514 \quad volts$$

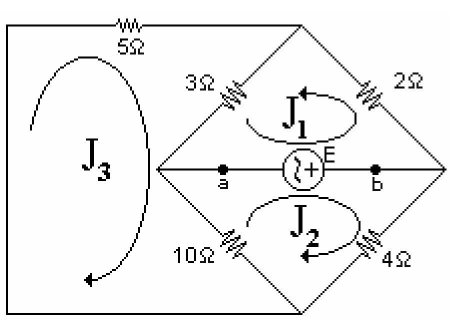
Por lo que el voltaje de Thévenin resulta:

$$V_{ab} = V_{Th} = 7.514 - 5.202 = 2.31 \quad volts$$

Se sugiere al estudiante calcular este voltaje empleando dos veces el divisor de voltaje.

Para calcular la resistencia de Thévenin pueden verse los problemas 6, 8 o 9 del Capítulo I (Estructuras pasivas de dos terminales).

Al pacificar la red:



$$E = RI \therefore R = E/I$$

$I = J_1 + J_2$ (corrientes diferentes de las anteriores)

Empleando el método de mallas:

$Z_{11} = 5$

$Z_{22} = 14$

$Z_{33} = 18$

$Z_{12} = 0$

$Z_{13} = 3$

$Z_{23} = -10$

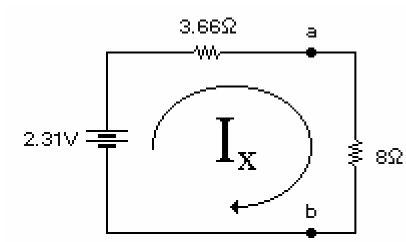
$$5J_1 + 0J_2 + 3J_3 = E$$
$$0J_1 + 14J_2 - 10J_3 = E$$
$$3J_1 - 10J_2 + 18J_3 = 0$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & 0 & 3 \\ E & 14 & -10 \\ 0 & -10 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 14 & -10 \\ 3 & -10 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{122E}{634}$$

$$J_2 = \frac{51E}{634}$$

$$R = \frac{E}{I} = \frac{E}{\frac{122E}{634} + \frac{51E}{634}} = \frac{634}{173} = 3.66\Omega$$

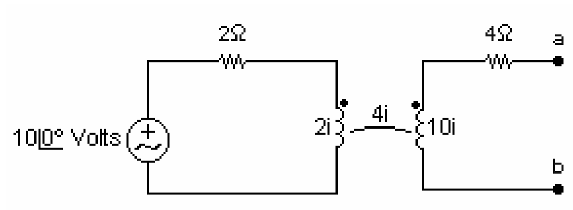
Al conectar al circuito equivalente de Thévenin el resistor de 8Ω:



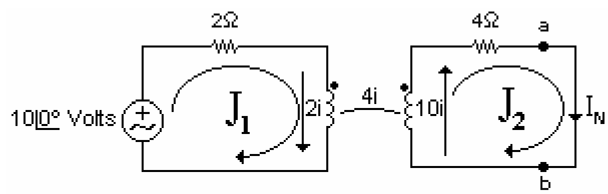
$$I_x = \frac{2.31}{11.66} = 198\ mA$$

PROBLEMA 11

En la red mostrada encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales ***a*** y ***b***.



Solución: Se cortocircuitan las terminales *a* y *b* y se orientan elementos y mallas:



$$Z_{12} = \text{-4i}$$

Aplicando el método de mallas:

$$Z_{11} J_1 + Z_{12} J_2 = 10$$
$$Z_{21} J_1 + Z_{22} J_2 = 0$$

$$Z_{11} = 2 + 2i$$
$$Z_{22} = 4 + 10i$$
$$Z_{12} = -4i$$

Sustituyendo impedancias de mallas:

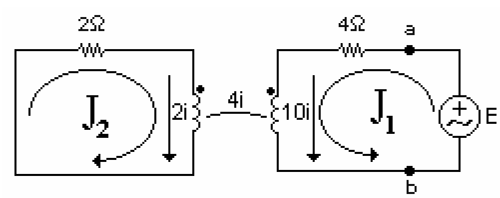
$$(2 + 2i)\, J_1 + (-4i)\, J_2 = 10$$
$$(-4i)\, J_1 + (4 + 10i)\, J_2 = 0$$

La corriente que circula por las terminales cortocircuitadas es la corriente de Norton, en este caso J_2.

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2+2i & 10 \\ -4i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+2i & -4i \\ -4i & 4+10i \end{vmatrix}} = \frac{40i}{4+28i} = 1.4144\underline{|8.14^{\circ}} \quad amp.$$

$$I_N = 1.4144\underline{|8.14^{\circ}} \quad amp.$$

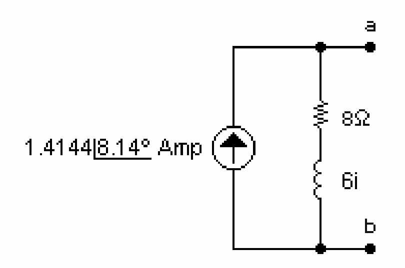
Calculemos ahora la impedancia vista entre las terminales *a* y *b*, para esto necesitamos pacificar la estructura activa original y conectar la fuente *E*:



$$Z_{11} = 4+10i$$
$$Z_{22} = 2+2i$$
$$Z_{12} = 4i$$

$$Z_{ab} = \frac{\det Z_{m,r}}{cof\ Z_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 4+10i & 4i \\ 4i & 2+2i \end{vmatrix}}{2+2i} = \frac{4+28i}{2+2i} = 8+6i\Omega$$

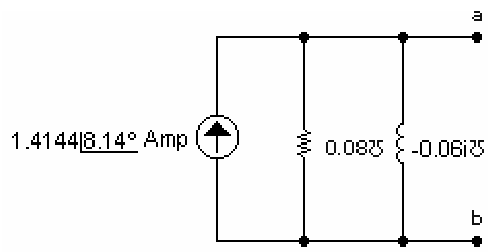
Representando esta impedancia con elementos de circuito tendremos el circuito equivalente de Norton como sigue:



O bien, en función de la admitancia:

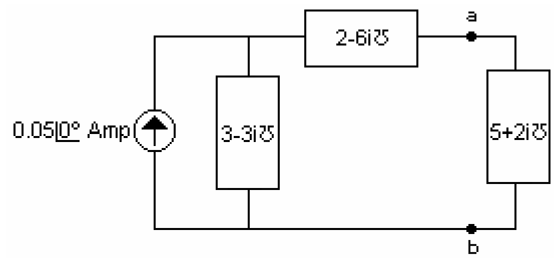
$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{8+6i} = 0.08 - 0.06i$$

Obteniéndose:



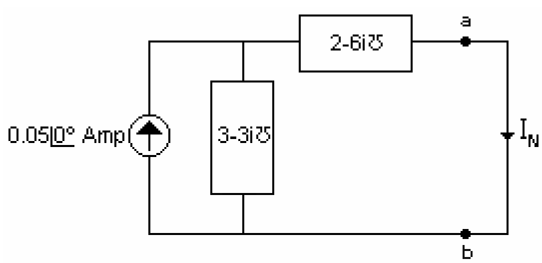
PROBLEMA 12

Encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales ***a*** y ***b***.



Solución:

1. Separamos la admitancia entre las terminales *a* y *b*, y cortocircuitamos estas terminales.

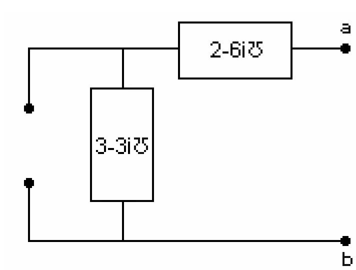


2. Aplicamos divisor de corriente con admitancias para calcular la I_N:

$$I_k = \frac{Y_k}{Y_T} I_{fc}$$

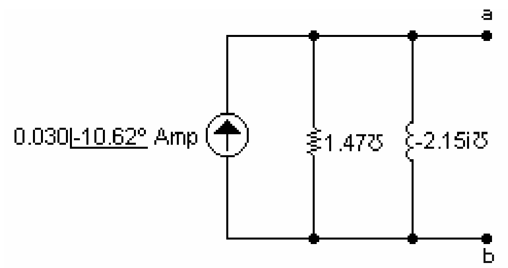
$$I_N = \frac{(2-6i)}{2-6i+3-3i}(0.05) = 0.030\underline{|-10.62^\circ} \quad amp.$$

3. Calculamos la admitancia de Norton. Pacificamos el circuito abriendo la fuente de corriente:



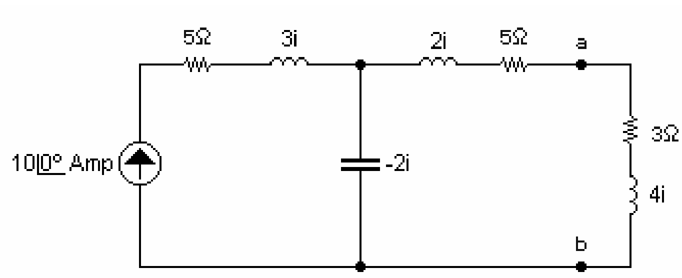
$$Y_N = \frac{(2-6i)(3-3i)}{2-6i+3-3i} = 1.47 - 2.15i$$

El circuito equivalente de Norton entre *a* y *b* es:



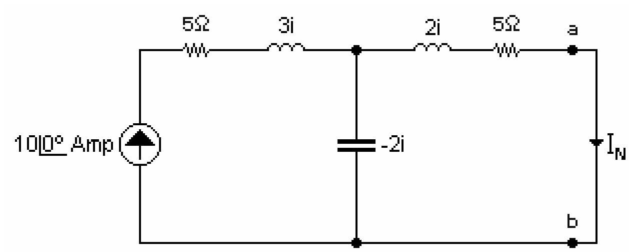
PROBLEMA 13

Aplicando el teorema de Norton calcule la corriente en la carga de 3+4*i*.



Solución:

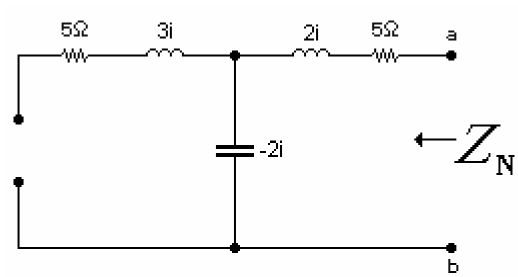
1. Separamos la carga y cortocircuitamos las terminales *a* y *b*:



2. Aplicamos divisor de corriente:

$$I_N = \frac{(-2i)}{5}(10) = 4\angle -90^{o} \quad amp.$$

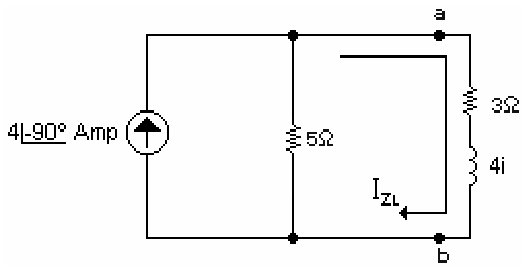
3. La admitancia de Norton se calcula de:



Puede observarse que por efecto del circuito abierto la impedancia de 5+3*i* queda anulada.

$$Y_N = \frac{1}{5} \quad ó \quad Z_N = 5\Omega$$

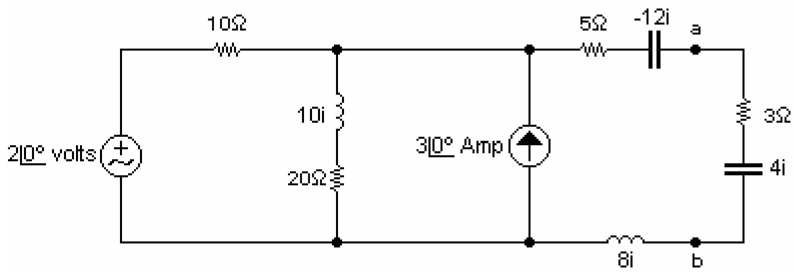
4. Conectamos la carga al circuito equivalente de Norton y aplicamos divisor de corriente con impedancias.



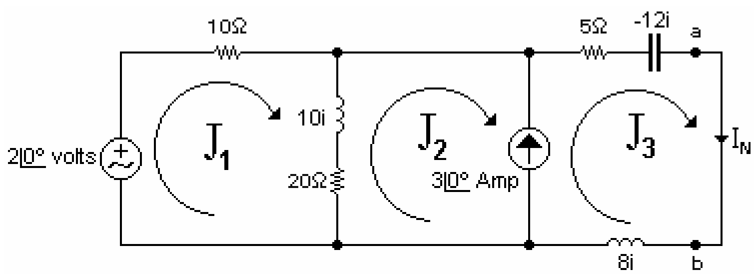
$$I_{Z_L} = \frac{5(4\angle -90^{o})}{5+3+4i} = \frac{20\angle -90^{\circ}}{8.94\angle 26.56^{\circ}} = 2.23\angle -116.56^{o} \ \textit{amp.}$$

PROBLEMA 14

Obtenga el circuito equivalente de Norton entre los puntos ***a*** y ***b*** de la siguiente red.



Solución: Separamos la carga de 3+4*i* y cortocircuitamos las terminales *a* y *b*.



Aplicando el método de mallas para encontrar I_N:

$Z_{11} = 30 + 10i$

$Z_{22} = 20 + 10i$

$Z_{33} = 5 - 4i$

$Z_{12} = -(20 + 10i)$

$Z_{13} = 0$

$Z_{23} = 0$

$$(30+10i)J_1 - (20+10i)J_2 + 0J_3 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$-(20+10i)J_1 + (20+10i)J_2 + 0J_3 = -D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$0J_1 + 0J_2 + (5-4i)J_3 = D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$J_3 - J_2 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3):

$$-(20+10i)\,J_1+(20+10i)\,J_2+(5-4i)\,J_3=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

De (4) :

$$0\,J_1-(1)\,J_2+(1)\,J_3=3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

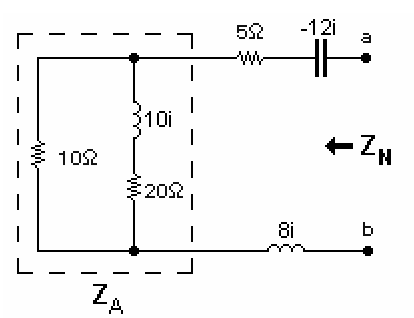
De (1) :

$$(30+10i)\,J_1-(20+10i)\,J_2+0\,J_3=2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

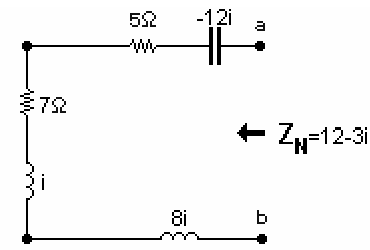
Observamos en nuestro circuito que J_3 es la corriente de Norton. Así:

$$J_3 = I_N = \frac{\begin{vmatrix} -(20+10i) & 20+10i & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 30+10i & -(20+10i) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(20+10i) & 20+10i & 5-4i \\ 0 & -1 & 1 \\ 30+10i & -(20+10i) & 2 \end{vmatrix}} = \frac{640+320i}{390+30i} = 1.6941+0.6901i = 1.82\angle 22.16^{\circ} \quad amp.$$

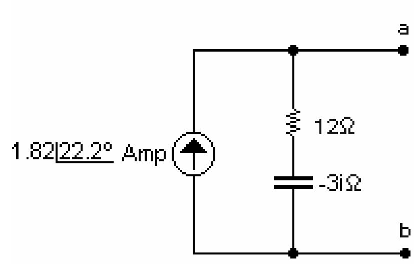
Calculando la impedancia de Norton:



$$Z_A = \frac{10(20+10i)}{10+20+10i} = \frac{200+100i}{30+10i} = 7+i \quad \Omega$$

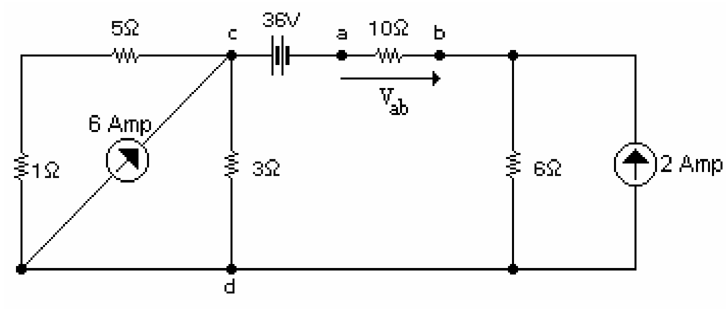


El circuito equivalente de Norton queda:

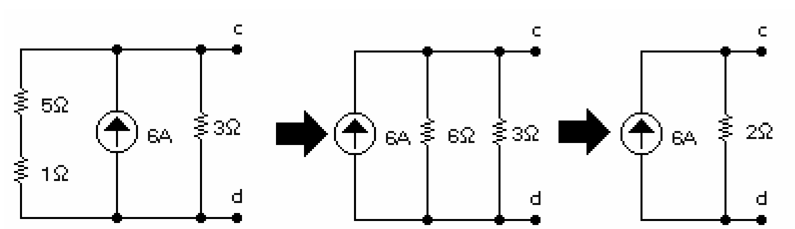


PROBLEMA 15

Empleando reducción serie-paralelo e intercambio de fuentes calcule V_{ab} en el circuito mostrado.

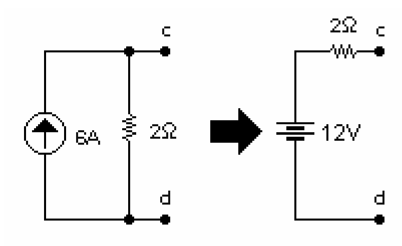


Solución: Del lado izquierdo:



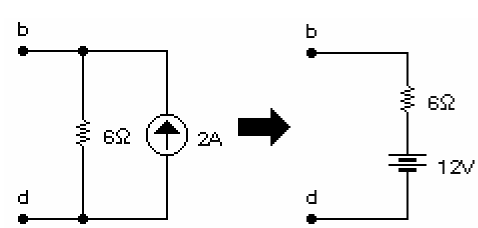
$$V = IR$$

$$V = (6)(2) = 12 \quad volts$$

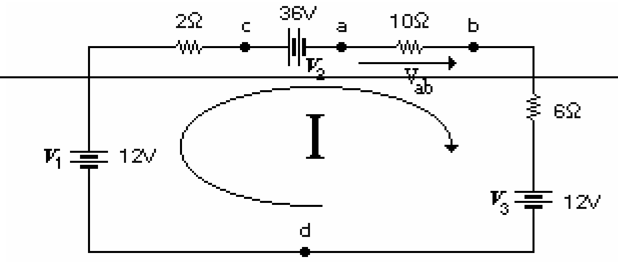


Del lado derecho en el circuito original, tendremos:

$$V = (2)(6) = 12 \quad volts$$



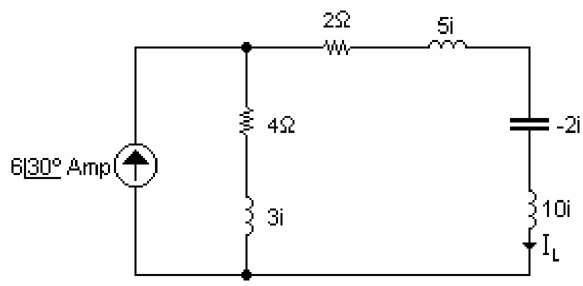
Haciendo las sustituciones correspondientes:



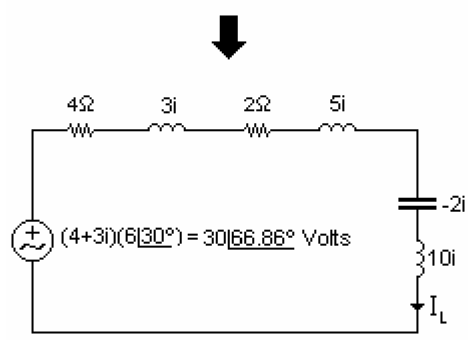
$$-V_1 + V_{R2} + V_2 + V_{R10} + V_{R6} + V_3 = 0$$
$$-12 + 2I + 36 + 10I + 6I + 12 = 0$$
$$18I + 36 = 0$$
$$\therefore\ I = -2 \quad amp.$$
$$V_{ab} = RI = (10)(-2) = -20 \quad volts$$

PROBLEMA 16

Empleando el teorema del intercambio de fuentes encuentre la corriente I_L que se indica en el circuito mostrado.



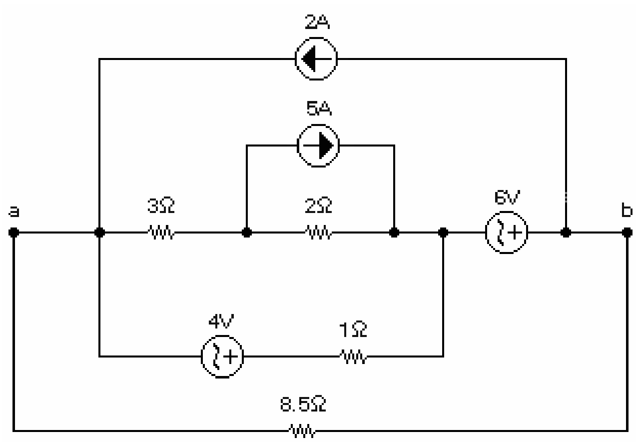
Solución:



$$I_L = \frac{30\angle 66.86^\circ}{6 + 16i} = \frac{30\angle 66.86^\circ}{17.08\angle 69.44^\circ} = 1.75\angle -2.58^\circ \quad amp.$$

PROBLEMA 17

Por intercambio sucesivo de fuentes entre los puntos ***a*** y ***b***, calcule la corriente que circula por la resistencia de 8.5Ω.



Solución: En las figuras siguientes se ilustra el intercambio de fuentes y resistencias entre *a* y *b*:

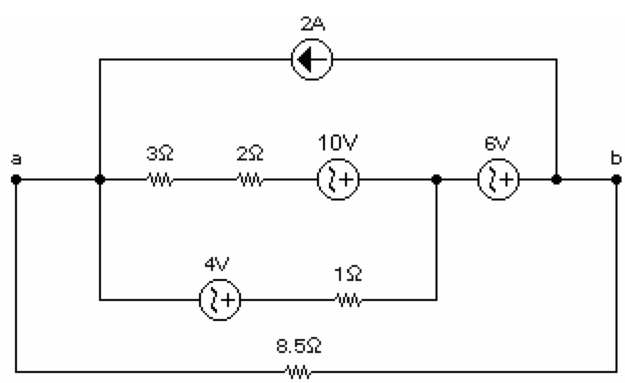


Figura 1

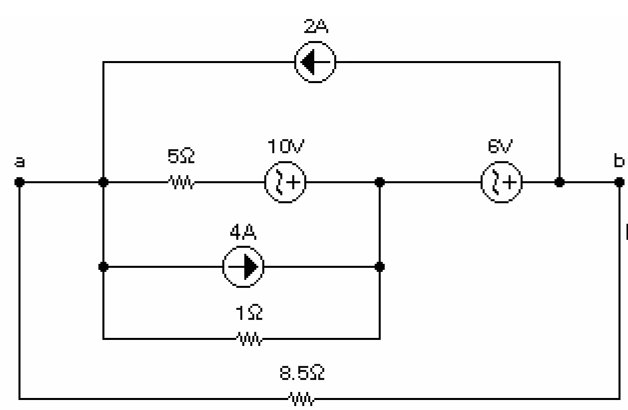


Figura 2

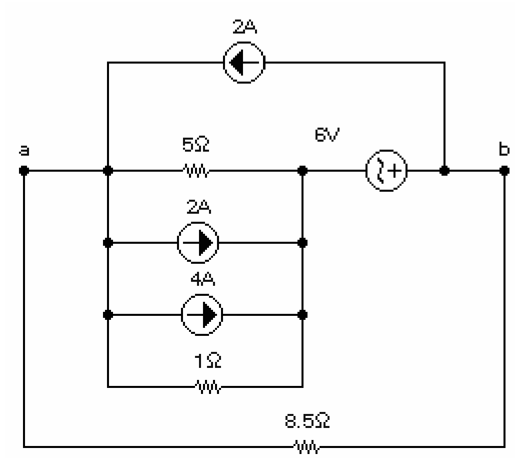


Figura 3

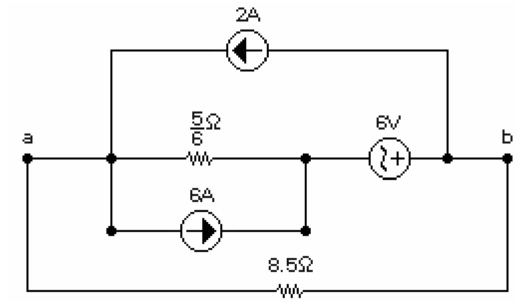


Figura 4

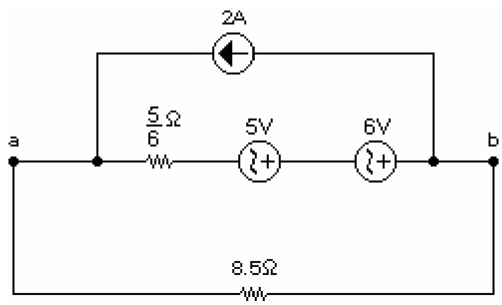


Figura 5

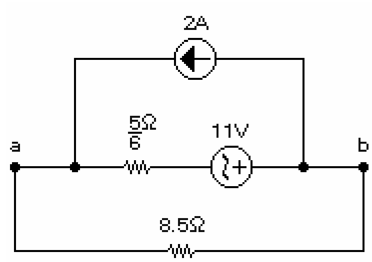


Figura 6

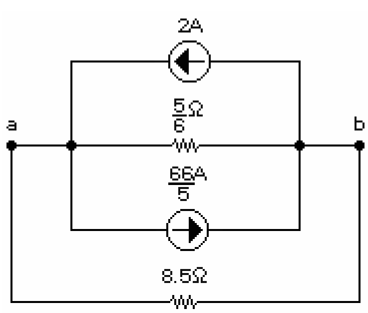


Figura 7

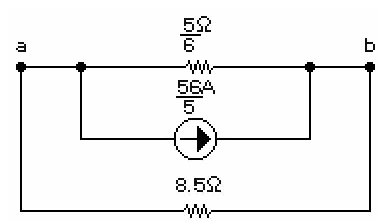


Figura 8

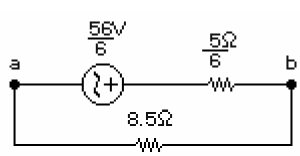
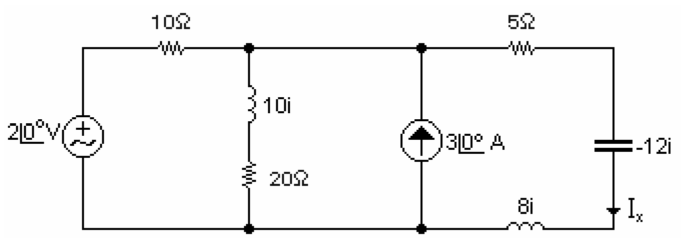


Figura 9

$$I_{ab} = \frac{\frac{56}{6}}{\frac{5}{6} + 8.5} = \frac{56}{56} = 1 \quad amp.$$

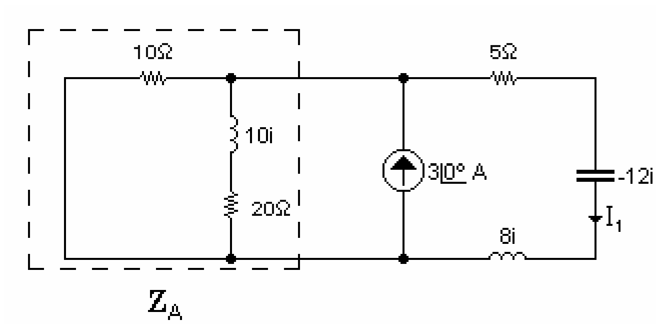
PROBLEMA 18

En el siguiente circuito encuentre la corriente I_x empleando el teorema de superposición.

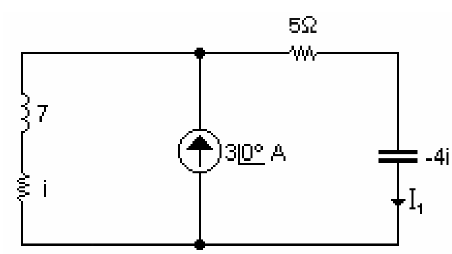


Solución:

1. Hacemos actuar la fuente de corriente y anulamos la fuente de voltaje cortocircuitándola.



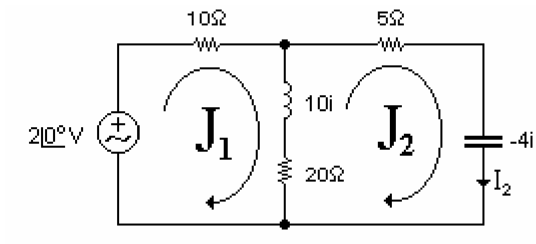
$$Z_A = \frac{10(20+10i)}{10+20+10i} = 7+i \quad \Omega$$



Por divisor de corriente:

$$I_1 = \frac{(7+i)(3\angle 0^\circ)}{12-3i} = \frac{21+3i}{12-3i}$$

2. Hacemos actuar ahora la fuente de voltaje y anulamos la fuente de corriente abriéndola.



Aplicando el método de mallas:

$Z_{11} = 30 + 10i$

$Z_{22} = 25 + 6i$

$Z_{12} = -(20 + 10i)$

$$(30+10i)\,J_1 - (20+10i)\,J_2 = 2$$
$$-(20+10i)\,J_1 + (25+6i)\,J_2 = 0$$

Se observa que la $J_2 = I_2$. Así:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30+10i & 2 \\ -(20+10i) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+10i & -(20+10i) \\ -(20+10i) & 25+6i \end{vmatrix}} = \frac{4+2i}{39+3i}$$

La corriente total I_x será la suma de las respuestas parciales I_1 e I_2:

$$I_x = I_1 + I_2$$
$$I_x = \frac{21+3i}{12-3i} + \frac{4+2i}{39+3i}$$

Haciendo operaciones algebraicas podemos convertir I_1 e I_2 a sus formas cartesianas y sumarlas, obteniendo un resultado aceptable; sin embargo, a fin de llegar a un resultado más exacto multiplicaremos el numerador y denominador de I_1 por el factor (3+i) y así obtener el mismo denominador que I_2:

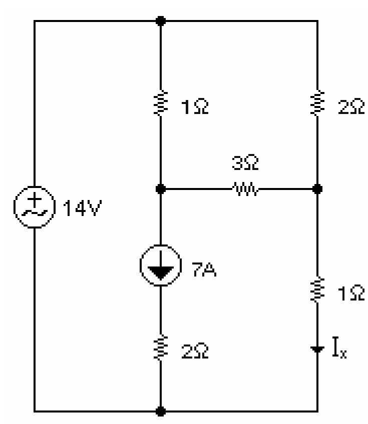
$$I_1 = \frac{(21+3i)(3+i)}{(12-3i)(3+i)} = \frac{60+30i}{39+3i}$$

$$I_x = \frac{60+30i}{39+3i} + \frac{4+2i}{39+3i} = \frac{64+32i}{39+3i} = 1.6941 + 0.6901i = 1.82\angle 22.16^\circ \quad amp.$$

Puede verificarse este resultado con el del problema No. 14 de este mismo capítulo.

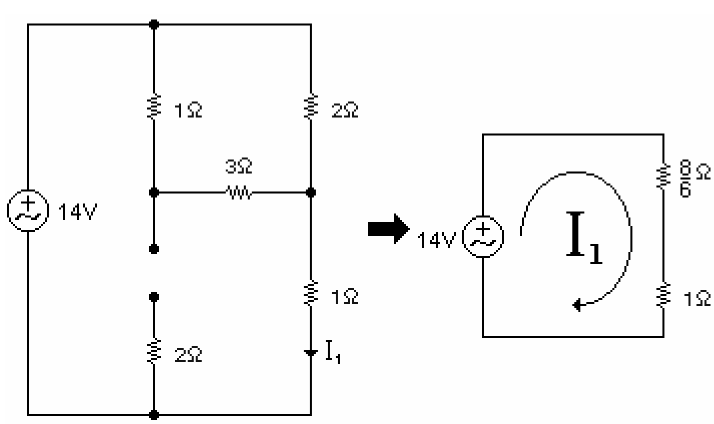
PROBLEMA 19

Empleando el teorema de superposición encuentre I_x.



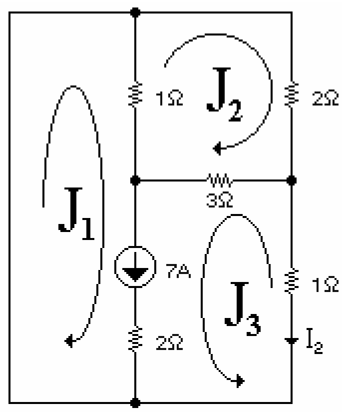
Solución:

1. Hacemos actuar la fuente de voltaje y anulamos la fuente de corriente abriéndola. El circuito queda:



$$I_1 = \frac{14}{\frac{4}{3} + \frac{3}{3}} = 6 \quad amp.$$

2. Ahora hacemos actuar la fuente de corriente y anulamos la fuente de voltaje cortocircuitándola. El circuito queda:



Resolviendo por el método de mallas:

$3J_1 - J_2 + 2J_3 = D$..................................(1)
$-J_1 + 6J_2 + 3J_3 = 0$................................(2)
$2J_1 + 3J_2 + 6J_3 = D$................................(3)

Restando la ecuación (3) de (1):

$J_1 - 4J_2 - 4J_3 = 0$.................(A)

Además :

$J_1 + J_3 = 7$...............................(B)

y de (2) :

$-J_1 + 6J_2 + 3J_3 = 0$...............(C)

Ordenando coeficientes de estas tres ecuaciones:

$$J_1 - 4J_2 - 4J_3 = 0$$
$$J_1 + 0J_2 + J_3 = 7$$
$$-J_1 + 6J_2 + 3J_3 = 0$$

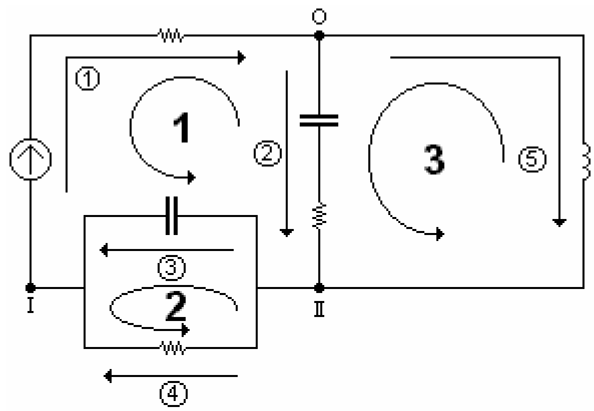
$$J_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{-14} = 1 \quad amp.$$

Se observa en el circuito que $I_2 = -J_3$. Así, la respuesta total es $I_x = I_1 + I_2$.

$$I_x = 6 + (-J_3) = 6 + (-1) = 5 \ amp.$$

PROBLEMA 20

Obtenga la red dual de la red dada empleando dualidad especial y verifique la correspondencia entre sus ecuaciones.



Solución:

Procedimiento

1. Se dibuja la gráfica de la red dada (líneas gruesas), orientando las mallas en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

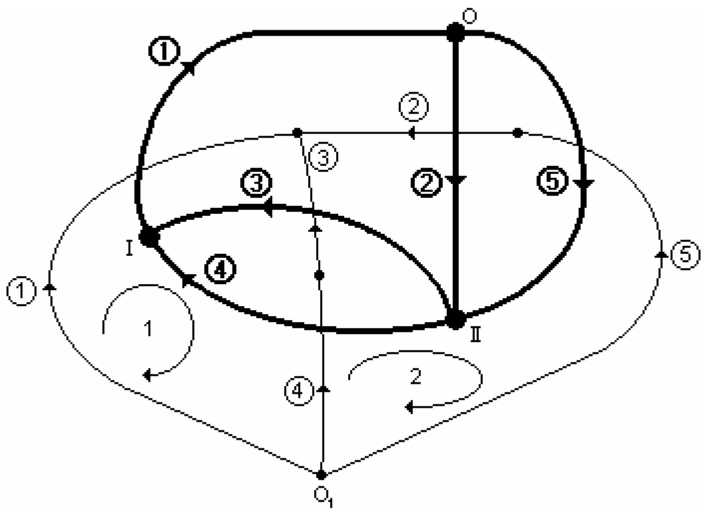
2. Se asigna a cada malla (ventana) un punto que será un nodo de la red dual y cuyo número será el de la malla de la red dada que lo encierre.

3. Se trazan líneas de un nodo a otro que pasen por un solo elemento (líneas delgadas), con lo cual se formarán mallas de la red dual. Estas mallas se designarán con el número del nodo de la red dada que quede encerrado por la malla formada.

4. Se orientan las mallas de la red dual en el sentido de las manecillas del reloj.

5. Los elementos de la red dual se orientan de modo que coincida el número de incidencia del elemento de la red dada con respecto a nodo de la misma red dada y el número de incidencia del elemento dual con respecto a malla de la red dual.

6. Se extrae la gráfica dual y se sustituyen los elementos básicos correspondientes en cada elemento general de dicha gráfica.

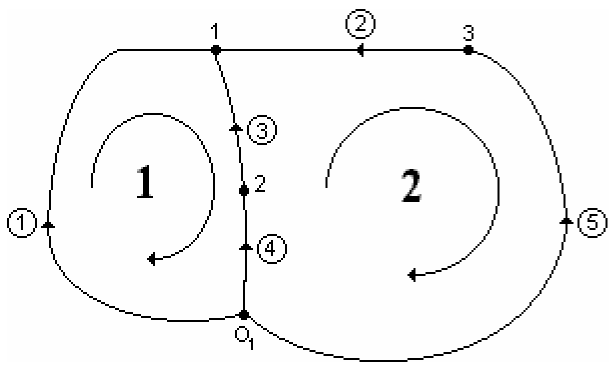


En la red original se tiene:

λ = número total de elementos de la red dada = 5.

υ-c = número de nodos independientes de la red dada = 2.

μ = número de mallas independientes de la red dada = 3.



Gráfica de la red dual.

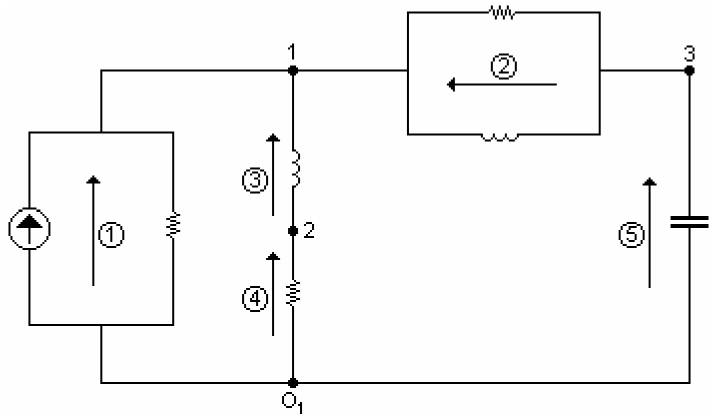
En la red dual se tiene que:

λ = 5 elementos.

υ-c = 3 nodos independientes.

μ = 2 mallas independientes.

Al aplicar la correspondencia entre elementos dada por el principio de dualidad especial se obtiene la red dual siguiente:



Correspondencia entre ecuaciones:

Red dada ***Red dual***

$$V_1 = R_1 I_1 - E_1 \quad \leftrightarrow \quad I_1 = G_1 V_1 + I_{fc1}$$

$$V_2 = \left(R_2 + \frac{S_2}{i\omega} \right) I_2 \quad \leftrightarrow \quad I_2 = \left(G_2 + \frac{\Gamma_2}{i\omega} \right) V_2$$

$$V_3 = \frac{S_3}{i\omega} I_3 \quad \leftrightarrow \quad I_3 = \frac{\Gamma_3}{i\omega} V_3$$

$$V_4 = R_4 I_4 \quad \leftrightarrow \quad I_4 = G_4 V_4$$

$$V_5 = i\omega L_5 I_5 \quad \leftrightarrow \quad I_5 = i\omega C_5 V_5$$

nodo I) $I_1 - I_3 - I_4 = 0$ $\leftrightarrow$ malla 1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$

nodo II) $-I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$ $\leftrightarrow$ malla 2) $-V_2 + V_3 + V_4 - V_5 = 0$

malla 1) $-V_1 - V_2 - V_3 = 0$ $\leftrightarrow$ nodo 1) $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$

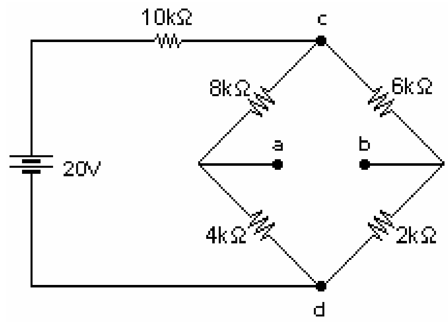
malla 2) $V_3 - V_4 = 0$ $\leftrightarrow$ nodo 2) $I_3 - I_4 = 0$

malla 3) $V_2 - V_5 = 0$ $\leftrightarrow$ nodo 3) $I_2 - I_5 = 0$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

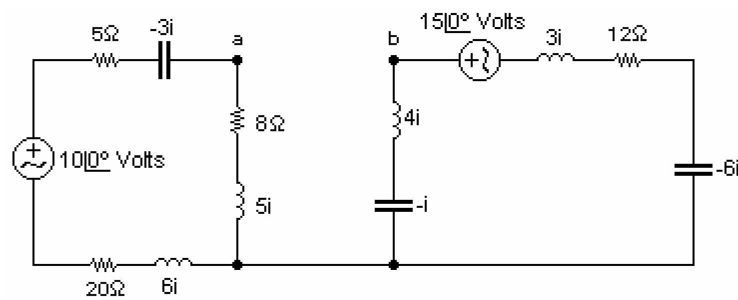
PROBLEMA 1

Usando dos veces el divisor de voltaje encuentre V_{ab}.



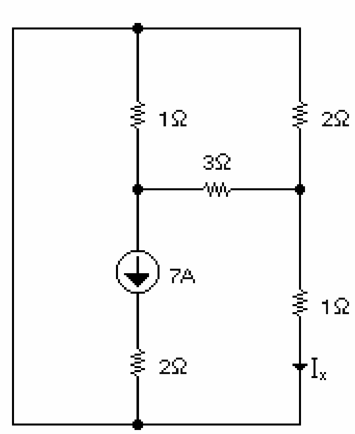
PROBLEMA 2

En la siguiente red calcule V_{ab} empleando divisor de voltaje.



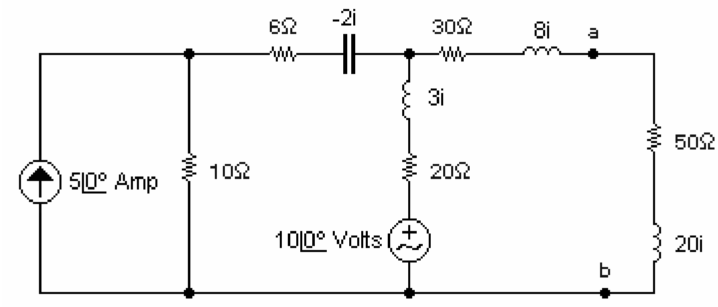
PROBLEMA 3

Usando reducción serie-paralelo y divisor de corriente encuentre la corriente I_x.



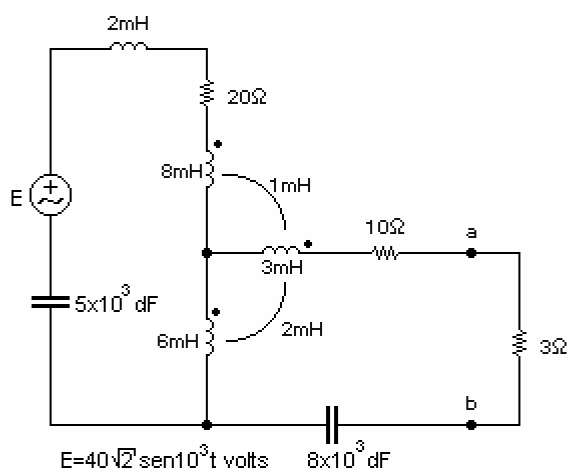
PROBLEMA 4

Aplicando intercambio de fuentes y el teorema de Thévenin encuentre la corriente en la carga de 50+20*i*.



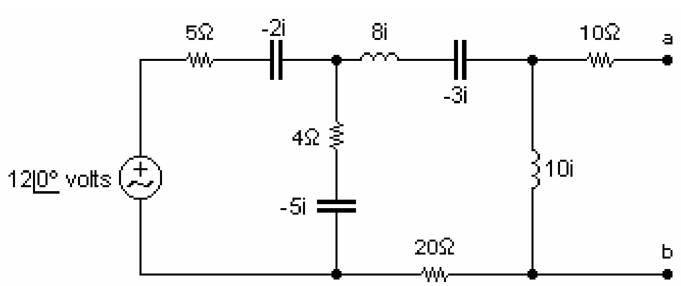
PROBLEMA 5

Empleando el teorema de Thévenin encuentre la corriente en la carga de 3Ω.



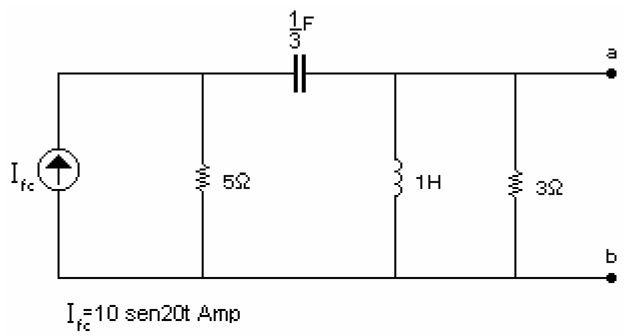
PROBLEMA 6

Encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales ***a*** y ***b***.



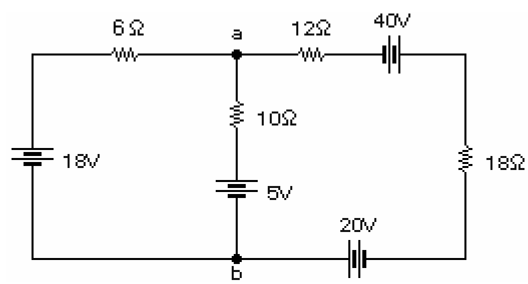
PROBLEMA 7

Encuentre el circuito equivalente de Norton entre las terminales ***a*** y ***b***.



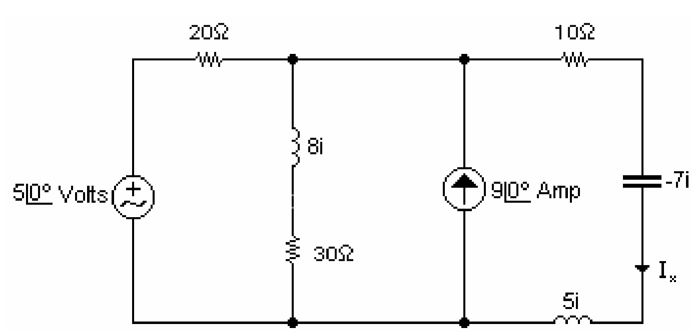
PROBLEMA 8

Empleando intercambio de fuentes encuentre la tensión entre los puntos ***a*** y ***b*** del circuito mostrado.



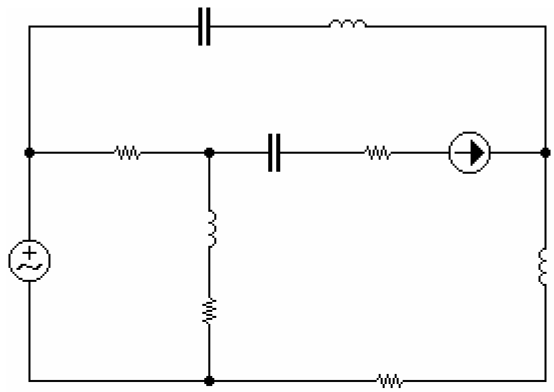
PROBLEMA 9

En el siguiente circuito encuentre I_x empleando el teorema de superposición.



PROBLEMA 10

Obtenga la red dual del circuito mostrado y verifique la correspondencia entre sus ecuaciones (emplee dualidad especial).



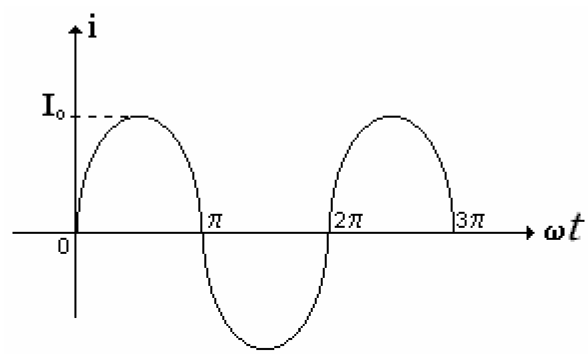
CAPÍTULO III

VALORES MEDIOS
Y
POTENCIA

PROBLEMA 1

Dada la función i(t) = $I_0 sen(\omega t)$ representada en la gráfica, encontrar:

a) El valor medio I_m.
b) El valor eficaz I_{ef}.



Solución:

a) El valor medio de la función i(t) = I_0sen(ωt) con ωt como variable independiente y periodo T=2π es:

$$I_m = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_0 \operatorname{sen}(\omega t)d(\omega t) = \frac{I_0}{2\pi}\left[-\cos(\omega t)\right]_0^{2\pi} = \frac{I_0}{2\pi}\left[-\cos(2\pi)+\cos(0)\right]$$

$$I_m = \frac{I_0}{2\pi}[-1+1] = 0$$

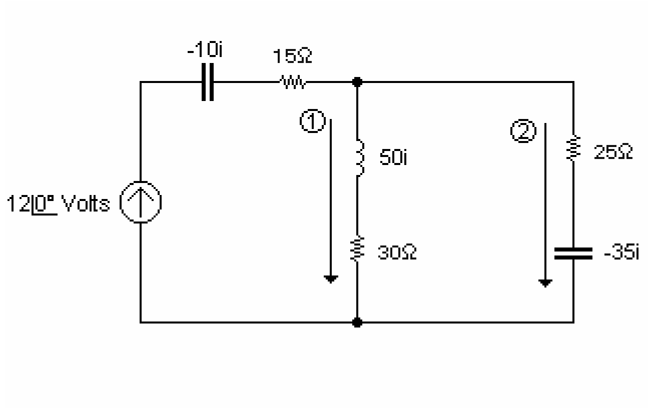
b) El valor eficaz o r.m.s. de la función dada es:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[I_0 \operatorname{sen}(\omega t)\right]^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(\omega t)d(\omega t)}$$

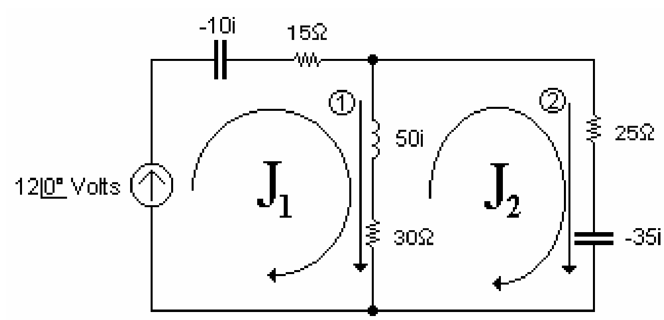
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\omega t)\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{2} - 0\right)} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

PROBLEMA 2

Calcule la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia en la rama 2 del circuito dado. Dibuje el triángulo de potencias de esta rama.



Solución:



$$P = \overline{Z}\left|I\right|^2$$

La corriente en la rama 2 es J_2 , luego:

$$P = \overline{Z}\left|J_2\right|^2$$

Aplicando el método de mallas:

$Z_{11} = 45 + 40i$

$Z_{22} = 55 + 15i$

$Z_{12} = -30 - 50i$

$(45 + 40i)\,J_1 + (-30 - 50i)\,J_2 = 12$

$(-30 - 50i)\,J_1 + (55 + 15i)\,J_2 = 0$

resolviendo para J_2:

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 45+40i & 12 \\ -(30+50i) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 45+40i & -(30+50i) \\ -(30+50i) & 55+15i \end{vmatrix}} = \frac{12(30+5i)}{3475-125i} = \frac{699.71\underline{|59^\circ}}{3447.24\underline{|-2.06^\circ}} = 0.201\underline{|61.1^\circ} \quad amp.$$

al sustituir valores en:

$$P = \overline{Z}\left|I\right|^2 = (25+35i)(0.201)^2 = 1.01+1.4i = 1.72\underline{|54.19^\circ} \quad VA$$

De la expresión:

$P = P_a + iP_r$ obtenemos:

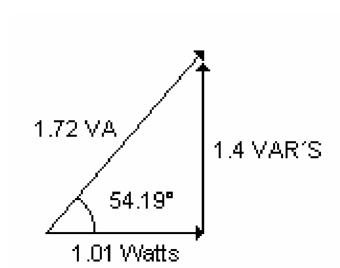
P_{activa}= 1.01 *Watts*

$P_{reactiva}$= 1.4 *VAR´S*

$P_{aparente}$= 1.72 VA

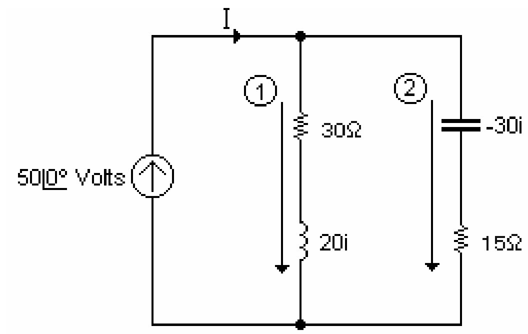
f.p.= cos(54.19°) = 0.58_+ (adelantado)

Triángulo de potencias en la rama 2:



PROBLEMA 3

En la red dada encuentre la potencia activa, reactiva, aparente y el factor de potencia de la carga total. Posteriormente calcule las mismas potencias P_1 y P_2 empleando divisor de corriente y compruebe que $P_T = P_1 + P_2$ e igual a la potencia de la fuente de alimentación.



Solución:

$$\overline{Z}_T = \frac{(30+20i)(15-30i)}{45-10i} = \frac{1050-600i}{45-10i} = \frac{1209.3\angle -29.7^\circ}{46.09\angle -12.52^\circ} = 26.23\angle -17.18^\circ \quad \Omega$$

$$\overline{Z}_T = 26.23\angle 17.18^\circ \quad \Omega$$

$$|I| = \frac{|V|}{|Z_T|} = \frac{50}{26.23} = 1.90 \quad amp.$$

$$P = \overline{Z}_T |I|^2 = 26.23\angle 17.18^\circ (1.90)^2 = 94.69\angle 17.18^\circ = 90.46 + 27.96i$$

De donde podemos ver que:

P_{activa}= 90.46 watts

$P_{reactiva}$= 27.96 VAR'S

$P_{aparente}$= $|P|$ = 94.69 VA

El ángulo de la potencia es el mismo que el de la impedancia conjugada $\overline{Z}_T$.
El factor de potencia vale:

f.p. = $cos(17.18^\circ) = 0.95_+$ (adelantado).

Cálculo de la potencia en la rama 1:

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{50\angle 0^{o}}{26.23\angle -17.18^{o}}=1.90\angle 17.18^{o}\quad amp.$$

Por divisor de corriente :

$$I_1=\frac{(15-30i)(1.90\angle 17.18^{o})}{45-10i}=\frac{63.72}{46.09}\angle 30.32^{o}=1.38\angle 30.32^{o}\quad amp.$$

$$P_1=\overline{Z}\,\left|I_1\right|^2=(30-20i)(1.38)^2=57.3-38i=68.6\angle -33.7^{o}$$

$$P_a=57.3\quad watts$$

$$P_r=38\quad VAR'S$$

$$P_{ap}=68.6\quad VA$$

$$f.p.=\cos(-33.7^{o})=0.8_{-}\,(atrasado)$$

Cálculo de la potencia en la rama 2:

$I = 1.90\angle 17.18^{o}$ *amp.*

Por divisor de corriente:

$$I_2=\frac{(30+20i)\left(1.90\angle 17.18^{o}\right)}{45-10i}=\frac{68.49\angle 50.87^{o}}{46.09\angle -12.52^{o}}=1.48\angle 63.39^{o}\quad amp.$$

$$P_2=\overline{Z}_2\left|I_2\right|^2=(15+30i)(1.48)^2=33+66i=73.46\angle 63.43^{o}$$

$$P_a=33\quad watts$$

$$P_r=66\quad VAR'S$$

$$P_{ap}=73.4\quad VA$$

$$f.p.=0.44_{+}\,(adelantado)$$

Comprobación de la conservación de la potencia. La potencia total debe ser la suma de las potencias de cada rama.

$P_T = P_1 + P_2$

$P_1 = 57.3 - 38i$

$P_2 = 33 + 66i$

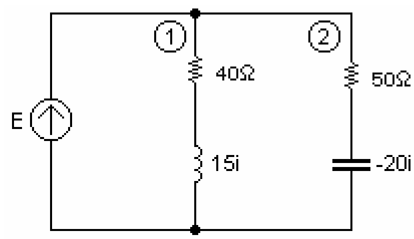
$P_T = 90.3+28i$ (resultado coincidente con el obtenido al calcular P_T inicialmente).

Cálculo de la potencia en la fuente de alimentación:

$$P_f=\overline{V}I=(50)(1.90\angle 17.8^{\circ})=95\angle 17.18^{\circ}$$

PROBLEMA 4

Encuentre la potencia activa, reactiva y el factor de potencia total del circuito mostrado cuando la potencia reactiva en la rama 2 es de 2000 VAR'S. Dibuje el triángulo de potencias.



Solución:

La potencia en la rama 2 es:

$$P_2 = (50+20i)\left|I_2\right|^2 = 50\left|I_2\right|^2 + i20\left|I_2\right|^2 = 50\left|I_2\right|^2 + 2000i$$

Igualando partes imaginarias:

$$i20\left|I_2\right|^2 = 2000i \therefore \left|I_2\right|^2 = \frac{2000}{20} = 100$$

$$\left|I_2\right| = 10 \quad amp.$$

Este resultado se pudo obtener también sabiendo que la potencia reactiva en la rama 2 es debida al capacitor, así:

$$P_c = \overline{Z}_c\left|I_2\right|^2 = 20i\left|I_2\right|^2 = 2000i \therefore \left|I_2\right| = 10 \quad amp.$$

$$\left|V_1\right| = \left|V_2\right|$$

$$\left|V_2\right| = \left|Z_2\right|\left|I_2\right| = \left(\sqrt{50^2+20^2}\right)(10) = 538.5$$

$$P_T = P_1 + P_2 = \frac{\left|V_1\right|^2}{Z_1} + \frac{\left|V_2\right|^2}{Z_2} = \frac{(538.5)^2}{40+15i} + \frac{(538.5)^2}{50-20i} = (538.5)^2\,\frac{(50-20i+40+15i)}{2300-50i} =$$

$$= \frac{90-5i}{2300-50i}(538.5)^2 = \left(\frac{18-i}{460-10i}\right)(538.5)^2 = 11355.4 - 383.5i$$

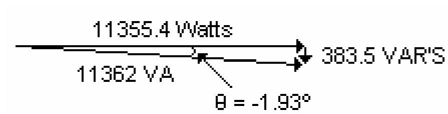
Obteniéndose:

$P_a = 11355.4 \quad watts$

$P_r = 383.5 \quad VAR'S$

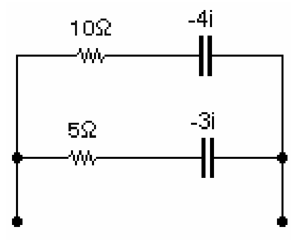
$f.p. = \cos(-1.93°) = 0.99_{-}(atrasado)$

Triángulo de potencias:



PROBLEMA 5

Obtenga el triángulo de potencias total y el factor de potencia del circuito dado, si la potencia reactiva consumida es de 1000 VAR'S (capacitivos o adelantados)

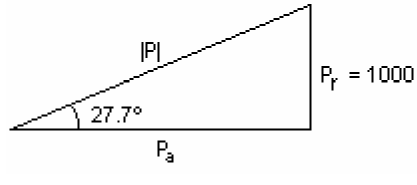


Solución:

$$Z_T = \frac{(5-3i)(10-4i)}{15-7i} = \frac{38-50i}{15-7i} = \frac{62.80\underline{|-52.7^o}}{16.55\underline{|-25^o}} = 3.79\underline{|-27.7^o} \quad \Omega$$

$$\overline{Z}_T = 3.79\underline{|27.7^o} \quad \Omega$$

Como el ángulo de la impedancia conjugada es el mismo que el de la potencia $\left(P = \overline{Z}\left|I\right|^2\right)$, podemos calcular por funciones trigonométricas la potencia activa y la potencia aparente.



$$tg(27.7°) = \frac{1000}{P_a}$$

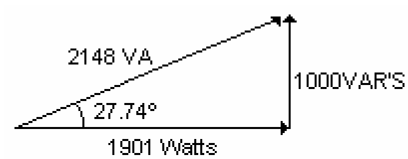
$$\therefore P_a = \frac{1000}{0.5259} = 1901 \quad watts$$

Potencia aparente = |P|:

$$\text{sen}(27.74°) = \frac{1000}{|P|} \therefore |P| = \frac{1000}{0.465460} = 2148 \quad VA$$

$$f.p. = \cos(27.74°) = 0.88_{+}(adelantado)$$

con lo cual, el triángulo de potencias queda:



Otro método:

Conocida la $\overline{Z}_T = 3.793\underline{|27.74°} = 3.3576 + 1.7664i \quad \Omega$

podemos aplicar $P = \overline{Z}|I|^2$:

$$P = 3.3576|I|^2 + 1.7664|I|^2 i$$

Sabemos que $P_r = +1000$ VAR'S (capacitivos o adelantados) por lo que:

$$1.7664|I|^2 = 1000 \therefore |I|^2 = \frac{1000}{1.7664} = 566.1231$$

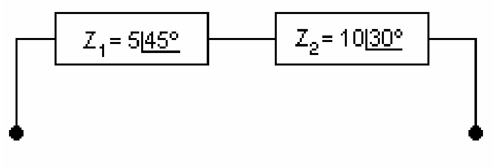
$$P = 3.35(566.1231) + 1.76(566.1231)i = 1901 + 1000i$$

$$|P| = \sqrt{1901^2 + 1000^2} = 2148 \quad VA$$

que son los mismos resultados obtenidos anteriormente.

PROBLEMA 6

La potencia reactiva consumida por dos impedancias $Z_1 = 5\underline{|45º}\ \Omega$ y $Z_2 = 10\underline{|30º}\ \Omega$ en serie es 1920 VAR'S en retraso (inductivos). Hallar la potencia activa P_a y la potencia aparente $|P|$, así como el factor de potencia. Obtenga el triángulo de potencias.



Potencia reactiva = 1920 VAR'S (inductivos)

Solución:

$$Z_1 = 3.53 + 3.53i$$

$$Z_2 = 8.66 + 5i$$

$$P_T = P_1 + P_2$$

$$P_T = \overline{Z}_1 |I|^2 + \overline{Z}_2 |I|^2 = (3.53 - 3.53i + 8.66 - 5i)|I|^2 = (12.19 - 8.53i)|I|^2$$

igualando partes imaginarias:

$$-8.53i|I|^2 = -1920i$$

$$\therefore |I|^2 = \frac{1920}{8.53} = 225.08$$

$$P_T = 2744 - 1920i = 3350\underline{|-35º}$$

Así que :

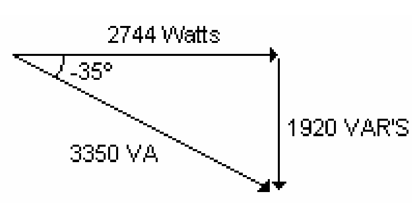
$$P_a = 2744 \quad watts$$

$$P_r = 1920 \quad VAR'S$$

$$|P_T| = 3350 \quad V.A.$$

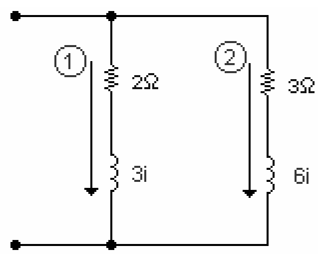
$$f.p = \cos(-35º) = 0.81\_\ (atrasado)$$

Triángulo de potencias:



PROBLEMA 7

Encuentre la potencia compleja del circuito mostrado, así como el factor de potencia sabiendo que la potencia activa total consumida es de 1500 watts.



Solución:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{|V|^2}{Z_1} + \frac{|V|^2}{Z_2}$$

$$P = \frac{|V|^2}{2+3i} + \frac{|V|^2}{3+6i} = \frac{|V|^2(2-3i)}{13} + \frac{|V|^2(3-6i)}{45} \text{..............................(1)}$$

la parte real de la suma de los dos últimos términos de la ecuación (1) es la potencia real o activa total, entonces:

$$\frac{2|V|^2}{13} + \frac{3|V|^2}{45} = 1500$$

$$|V|^2\left(\frac{2}{13} + \frac{3}{45}\right) = 1500$$

$$|V|^2\left(\frac{129}{585}\right) = 1500$$

$$\therefore |V|^2 = \frac{(1500)(585)}{129} = 6802$$

sustituyendo $|V|^2 = 6802$ en cada término de (1) :

$$P_1 = \frac{(6802)(2-3i)}{13} = 1046.46 - 1569.7i$$

$$P_2 = \frac{(6802)(3-6i)}{45} = 453.46 - 907i$$

$$P = P_1 + P_2 = 1046.46 - 1569.7i + 453.46 - 907i = 1500 - 2477i = 2895\underline{|-58.8^{o}}$$

$$P_a = 1500 \quad Watts$$

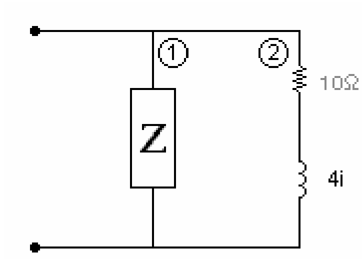
$$P_r = 2477 \quad VAR'S$$

$$|P| = 2895 \quad VA$$

$$f.p. = \cos(-58.8^{o}) = 0.518\_(atrasado)$$

PROBLEMA 8

En el circuito mostrado la potencia en el resistor de 10Ω es de 1000 watts y en el circuito total es de 5000 VA con un factor de potencia de 0.90 adelantado. Hallar ***Z.***



Solución: Método 1

$$\overline{V}\, I = \overline{V}\, I_1 + \overline{V}\, I_2$$

$$ang \quad \cos(0.90) = 25.84°$$

$$P_{2a} = R_2 \left| I_2 \right|^2 = \text{potencia activa en la rama 2}$$

$$1000 = 10 \left| I_2 \right|^2$$

$$\therefore \left| I_2 \right|^2 = 100$$

$$\left| I_2 \right| = 10 \quad amp.$$

$$V_2 = V = (10 + 4i)10$$

$$V = 107.70\angle 21.8° \quad volts$$

$$\overline{V} I = 5000\angle 25.84°$$

$$\therefore I = \frac{5000\angle 25.84°}{107.70\angle -21.8°} = 46.42\angle 47.64° \quad amp.$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$46.42\angle 47.64° = I_1 + 10$$

$$\therefore I_1 = 46.42\angle 47.64° - 10 = 31.27 + 34.30i - 10 = 21.27 + 34.30i = 40.35\angle 58.19° \quad amp.$$

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V}{I_1} = \frac{107.70\angle 21.8°}{40.35\angle 58.19°} = Z$$

$$Z = 2.66\angle -36.39° = 2.14 - 1.57i \quad \Omega$$

Método 2.

$ang \quad \cos(0.90) = 25.84°$

Pot. activa en la rama 2 = 1000 *watts*

$1000 = R_2 |I_2|^2$

$\therefore |I_2|^2 = \dfrac{1000}{10} = 100$

$|I_2| = I_2 = 10 \quad amp.$

$V = V_2 = Z_2 I_2$

$V = (10 + 4i)10 = 107.70\underline{|21.8°} \quad volts$

$|V|^2 = 11600$

$$P_T = \frac{|V|^2}{Z_T}$$

$$5000\underline{|25.84°} = \frac{11600}{Z_T}$$

$$\therefore Z_T = \frac{11600}{5000\underline{|25.84°}} = 2.32\underline{|-25.84°} \quad \Omega$$

Asimismo

$$Z_T = \frac{Z(10 + 4i)}{Z + 10 + 4i}$$

$$2.32\underline{|-25.84°} = \frac{Z(10 + 4i)}{Z + 10 + 4i}$$

haciendo operaciones algebraicas para despejar a *Z*, obtenemos:

$Z = 2.14 - 1.57i \ \Omega$

Método 3.

$ang \quad \cos(0.90) = 25.84°$

$$P_T = \frac{|V|^2}{Z_T} = \frac{|V|^2}{Z} + \frac{|V|^2}{10+4i}\text{......................................}(1)$$

La parte real o potencia activa en la rama 2 vale 1000 watts

$$R_e\left\{\frac{|V|^2}{10+4i}\right\} = 1000$$

$$\frac{10|V|^2}{116} = 1000 \therefore |V|^2 = 11600$$

Sustituyendo valores en la ecuación (1) :

$$5000\underline{|25.84°} = \frac{11600}{Z} + \frac{11600}{10+4i}$$

$$4500 + 2179i = \frac{11600}{Z} + 1077\underline{|-21.8°}$$

$$4500 + 2179i = \frac{11600}{Z} + 1000 - 400i$$

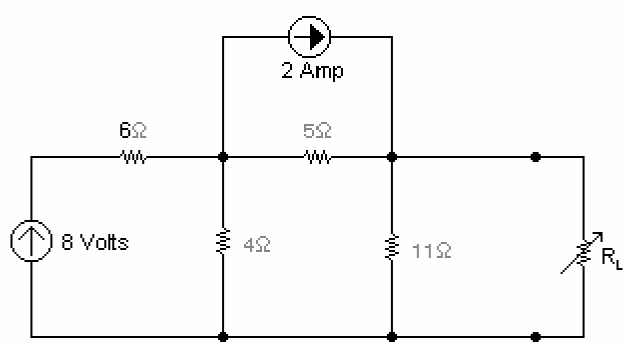
$$\frac{11600}{Z} = 3500 + 2579i$$

$$\therefore Z = \frac{11600}{3500+2579i} = \frac{11600}{4347.5}\underline{|-36.38°} = 2.668\underline{|-36.38°}$$

$$Z = 2.14 - 1.57i \quad \Omega$$

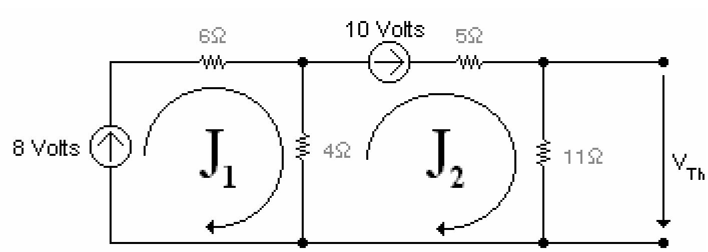
PROBLEMA 9

En la red de C.D. dada halle el valor de R_L para el cual se tendrá una máxima transferencia de potencia. Calcule la potencia máxima.



Solución:

1. Por intercambio de fuentes simplificamos la red.



2. Se deberá hallar el circuito equivalente de Thévenin.

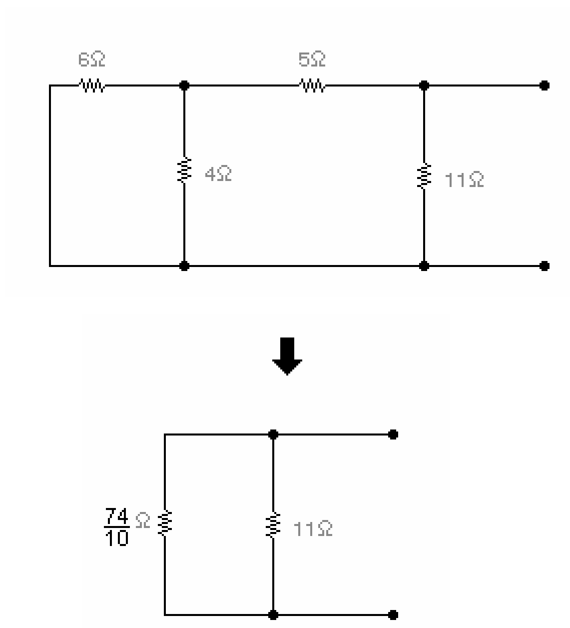
$V_{Th} = 11 J_2$

$$10 J_1 - 4 J_2 = 8$$
$$-4 J_1 + 20 J_2 = 10$$

$$J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{132}{184} = 0.7173 \quad amp.$$

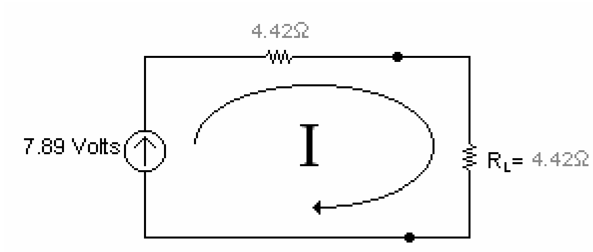
$V_{Th} = 11(0.7173) = 7.89 \quad volts$

La resistencia de Thévenin se calcula de:



$R_{Th} = 4.42\ \Omega$

3. Se calcula la potencia máxima en R_L.



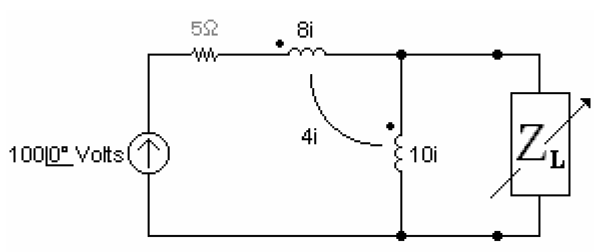
El valor de R_L debe ser igual al de R_{Th} para que se transfiera la máxima potencia.

$$I = \frac{7.89}{8.84} = 0.892 \quad amp.$$

$$Pot_{max} = R_L\left|I\right|^2 = 4.42(0.892)^2 = 3.51 \quad watts$$

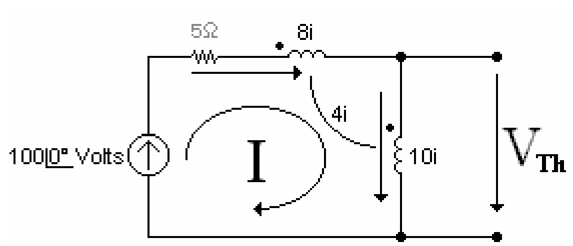
PROBLEMA 10

En el circuito mostrado encuentre el valor de la impedancia de carga $\boldsymbol{Z_L}$ que dé lugar a la transferencia de potencia máxima y calcule dicha potencia.



Solución:

1. Hallemos el circuito equivalente de Thévenin, obteniendo V_{Th} de:



$Z_{11} I = 100$

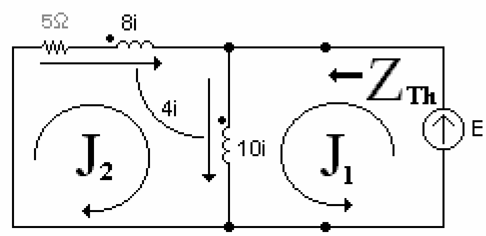
$Z_{11} = 5 + 8i + 10i + 2(4i) = 5 + 26i$

$$(5 + 26i)I = 100 \therefore I = \frac{100}{5 + 26i} = \frac{500 - 2600i}{701}$$

$I = 0.7132 - 3.70i \quad amp.$

$$V_{Th} = 10iI + 4iI = 14i(0.7132 - 3.70i) = 51.8 + 9.984i = 52.75\angle 10.9° \quad volts$$

Cálculo de la impedancia de Thévenin:



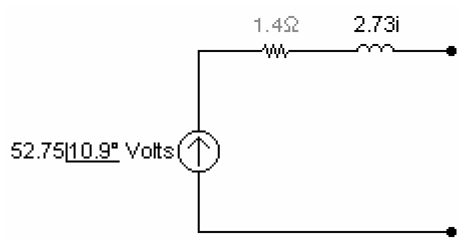
$Z_{11} = 10i$

$Z_{22} = 5 + 8i + 10i + 2(4i) = 5 + 26i$

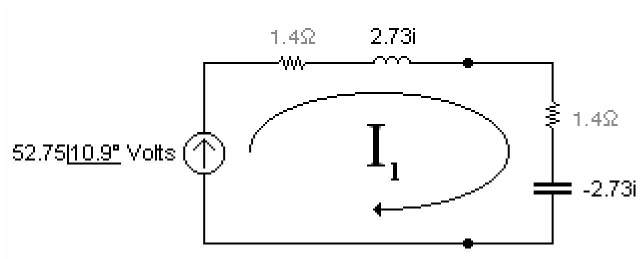
$Z_{12} = 10i + 4i = 14i$

$$Z_{Th} = \frac{\begin{vmatrix} 10i & 14i \\ 14i & 5 + 26i \end{vmatrix}}{5 + 26i} = \frac{-64 + 50i}{5 + 26i} = \frac{980 + 1914i}{701} = 1.4 + 2.73i$$

El circuito equivalente de Thévenin es:



2. La máxima transferencia de potencia tiene lugar cuando $Z_L = \overline{Z}_{Th}$



La impedancia total del circuito es:

$$Z_T = 1.4 + 2.73i + 1.4 - 2.73i = 2.8\Omega$$

3. Calculemos I_1 (nótese que la carga se reduce a 1.4 Ω, porque la bobina y el condensador se anulan).

$$I_1 = \frac{V}{Z_T} = \frac{52.75\angle 10.9^\circ}{2.8} = 18.83\angle 10.9^\circ \quad amp.$$

y la potencia máxima transferida es :

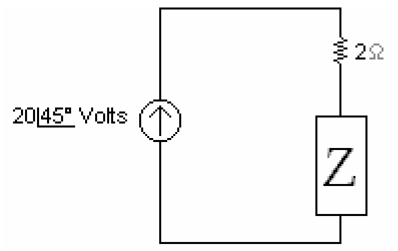
$$Pot_{max} = R_L\left|I_1\right|^2 = 1.4(18.83)^2$$

$$Pot_{max} = 496 \ \ watts$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

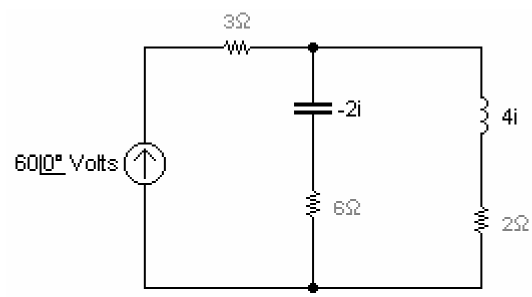
PROBLEMA 1

El circuito serie mostrado consume 64 watts con un factor de potencia de 0.8 en retraso. Hallar la impedancia ***Z*** y el triángulo de potencias.



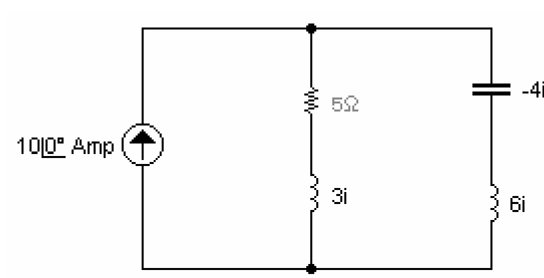
PROBLEMA 2

Encuentre la potencia compleja y el factor de potencia en cada rama de la red dada. Compruebe la conservación de la potencia compleja.



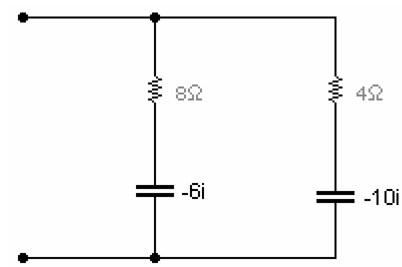
PROBLEMA 3

Empleando divisor de corriente encuentre la potencia en cada rama del circuito dado y compruebe que $P_{fc} = P_1 + P_2$.



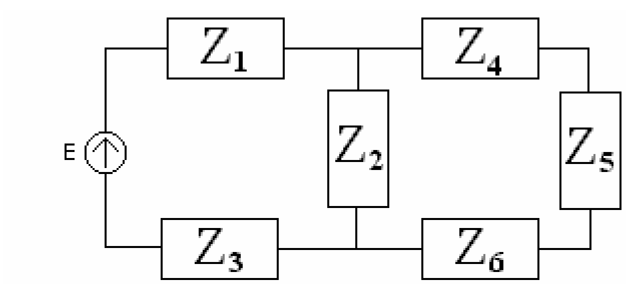
PROBLEMA 4

Mediante funciones trigonométricas obtenga la potencia reactiva, aparente y el factor de potencia del circuito dado, sabiendo que la potencia activa consumida es de 2000 watts. Dibuje el triángulo de potencias.



PROBLEMA 5

En la siguiente configuración calcule la potencia aparente, activa, reactiva y el factor de potencia en Z_5. Obtenga el triángulo de potencias en dicha impedancia.

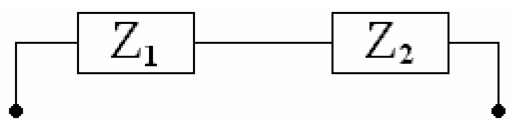


$E = 20\underline{|0°}$ volts

$Z_1 = 3$
$Z_2 = 2+2i$
$Z_3 = 2i$
$Z_4 = 1 + i$
$Z_5 = 4 + i$
$Z_6 = 1 + 2i$

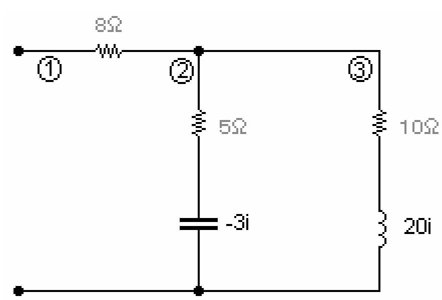
PROBLEMA 6

La potencia reactiva consumida por dos impedancias $Z_1 = 8\underline{|-15°}\ \Omega$ y $Z_2 = 20\underline{|-45°}\ \Omega$ en serie es de 800 VAR'S adelantados. Hallar la potencia activa, aparente y el factor de potencia.



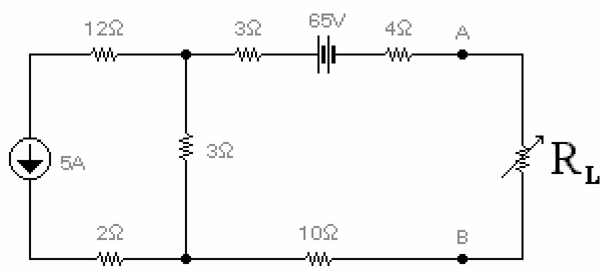
PROBLEMA 7

Calcule la potencia compleja en cada rama del circuito dado, cuando la potencia reactiva en la rama 3 es de 500 VAR'S.



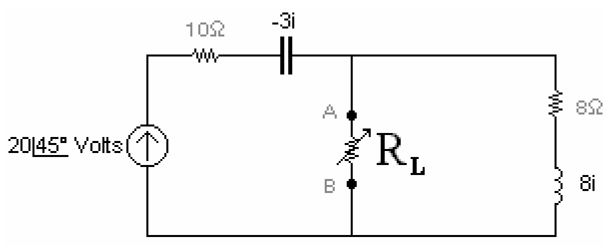
PROBLEMA 8

En el circuito mostrado determine el valor de $\boldsymbol{R_L}$ al cual se le transfiera la máxima potencia y calcule dicha potencia.



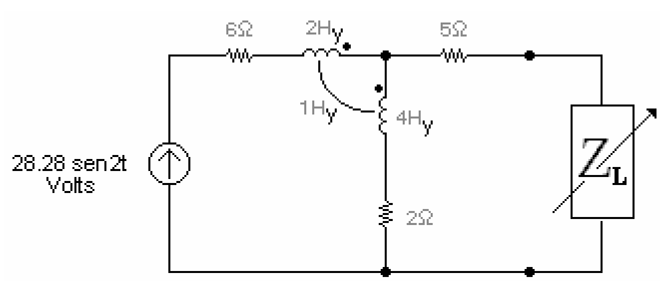
PROBLEMA 9

En el circuito dado determine el valor de $\boldsymbol{R_L}$ que dé lugar a la máxima transferencia de potencia. Calcule la potencia máxima suministrada a la carga.



PROBLEMA 10

En el circuito mostrado encuentre el valor de la impedancia de carga $\boldsymbol{Z_L}$ que dé lugar a la transferencia de potencia máxima y calcule dicha potencia.



PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

PROBLEMA 1

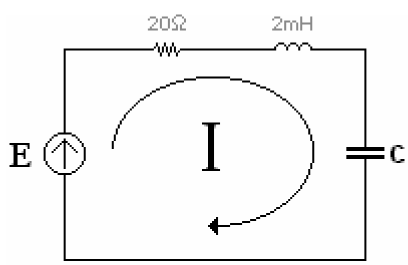
Diseñe un circuito *RLC* serie resonante para la corriente con una tensión de entrada de $5\underline{|0°}$ volts que tenga las siguientes especificaciones:

a) Una corriente pico de 10 mA.
b) Un ancho de banda de 120 Hz.
c) Una frecuencia de resonancia de 3×10^3 Hz.

Encuentre *R*, *L* y *C* y las frecuencias de corte.

PROBLEMA 2

Un circuito *RLC* serie con R=20 Ω y L=2 mHy operando a una frecuencia de 500 Hz tiene un ángulo de fase de 45° en adelanto. Hallar la frecuencia de resonancia para la corriente del circuito.



PROBLEMA 3

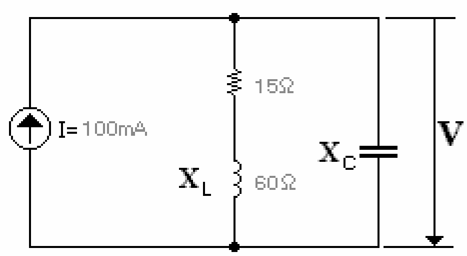
La tensión aplicada a un circuito serie *RLC* con C=16 μF es de $v(t) = 120\sqrt{2}\cos(1000t - 30°)$ volts y la corriente que circula es $i(t) = 3\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,1000t$ amp. Encuentre los valores de *R* y de *L* ¿cuál será la frecuencia de resonancia ω_0 para la corriente?

PROBLEMA 4

Se tiene un circuito *RLC* serie con una frecuencia de resonancia para la corriente de f_0 = 300 Hz y un ancho de banda *AB* = 100 Hz. Encuentre la Q_0 del circuito y las frecuencias de corte f_1 y f_2.

PROBLEMA 5

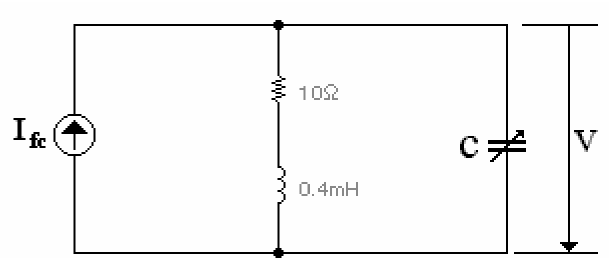
En la red dada:



a) Calcule la Q_0 de la red.
b) Encuentre el valor de X_C para la resonancia en V.
c) Determine la frecuencia de resonancia f_0 si el ancho de banda es de 5000 Hz.
d) Calcule el máximo valor de la tensión V_C.
e) Calcule las frecuencias de corte f_1 y f_2.

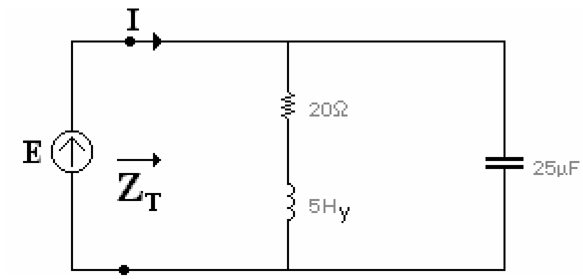
PROBLEMA 6

Calcule el valor de *C* para que el circuito mostrado entre en resonancia para *V* a una frecuencia angular ω_0 = 25000 *rad/seg.*



PROBLEMA 7

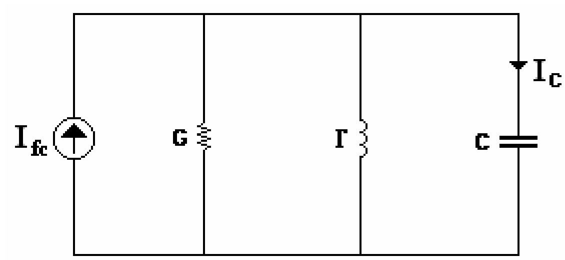
En el circuito dado:



a) Encuentre la frecuencia ω_0 que haga mínima la corriente *I*.
b) Calcule las reactancias X_L y X_C a esta frecuencia.
c) Encuentre Z_T a la frecuencia ω_0.
d) Si $E=200\underline{|0^\circ}$ volts encuentre I, I_L e I_C.

PROBLEMA 8

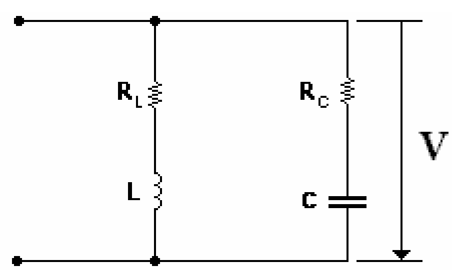
En el circuito *RLC* paralelo que se muestra:



a) Encuentre por dualidad la frecuencia de resonancia ω_0 para la corriente en el capacitor y la expresión para el módulo máximo de dicha corriente (ver problema núm. 7 resuelto).
b) Verifique los resultados anteriores haciendo el desarrollo completo del método.

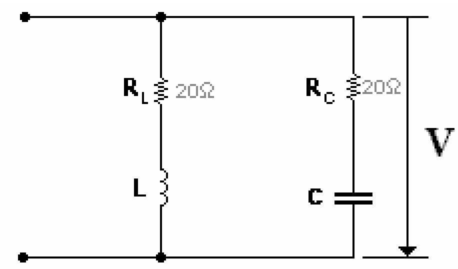
PROBLEMA 9

Deduzca la expresión para calcular la frecuencia de resonancia para *V* en el circuito paralelo de dos ramas mostrado.



PROBLEMA 10

En el circuito paralelo de dos ramas que se muestra, encuentre el valor de L y de C para que la red entre en resonancia para V a cualquier frecuencia. Exprese la condición que relacione a R_L, R_C , L y C.

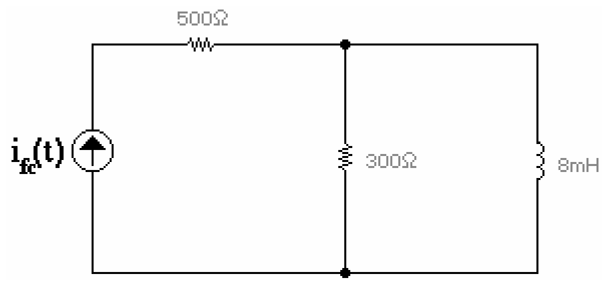


CAPÍTULO V

REDES CON MULTIFRECUENCIAS

PROBLEMA 1

En el circuito dado $i_{fc}(t)$ = 5 + 10sen1000t + 15sen(2000t + 30°) amp. Calcule el voltaje instantáneo en la bobina y en el resistor en serie con la fuente.



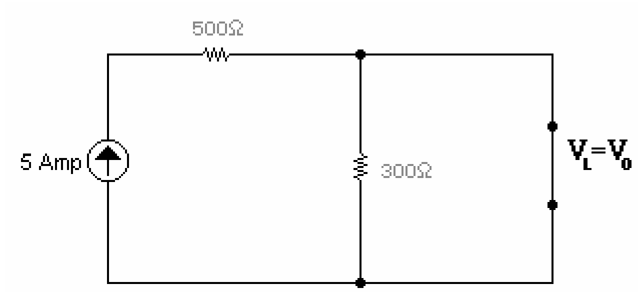
Solución:

Se observa que la fuente posee término constante y términos senoidales, por lo que habrá que resolver la red auxiliar de C.D. y la red auxiliar de C.A. Calcularemos primeramente el voltaje en la bobina en cada red auxiliar.

Red auxiliar de C.D.

En corriente directa la bobina se comporta como corto circuito.

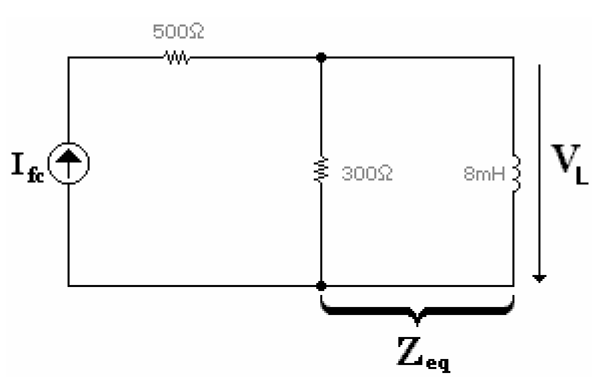
$$Z_L = i\omega L = i(0)L = 0 \quad \Omega$$



Por tanto $v_0 = 0$ *volts*

Red auxiliar de C.A.

La red auxiliar de C.A. es el circuito original con corrientes y voltajes complejos.



En el análisis de problemas con fuentes senoidales de diferentes frecuencias se aplica el teorema de superposición, es decir, haremos actuar por separado cada término de la fuente para obtener una respuesta parcial y la suma de estas respuestas parciales será la respuesta total.

El voltaje en la bobina está dado por:

$$V_L = Z_{eq} I$$

Consideremos primeramente el término

$$i'_{fc}(t) = 10\text{sen}1000t \leftrightarrow 10\angle 0°$$

para $\omega = 1000 \,{}^{rad}\!/_{seg}$, $I' = 10\angle 0°$ *amp.*

$$Z'_{eq} = \left[\frac{(300)(ix10^3)(8x10^{-3})}{300+(ix10^3)(8x10^{-3})}\right] = \frac{2400\angle 90°}{300.1\angle 1.52°} = 7.99\angle 88.48° \ \ \Omega$$

$$V' = Z'_{eq} I' = (7.99\angle 88.48°)(10\angle 0°)$$

$$V' = 79.9\angle 88.48° \ \ volts$$

Este complejo corresponde a la senoide

$$v'(t) = 79.9\,\text{sen}(1000t + 88.48°) \ \ volts$$

Ahora consideremos el segundo término senoidal de la fuente.

$$i''(t) = 15\text{sen}(2000t + 30°) \leftrightarrow 15\angle 30°$$

para $\omega = 2000 \,{}^{rad}\!/_{seg}$, $I'' = 15\angle 30°$ *amp.*

$$Z''_{eq} = \frac{(300)(i)(2x10^3)(8x10^{-3})}{300+i(2x10^3)(8x10^{-3})} = \frac{300x16i}{300+16i} = \frac{4800\angle 90°}{300.42\angle 3.05°} = 15.97\angle 86.95° \ \ \Omega$$

$$V'' = Z''_{eq} I'' = (15.97\angle 86.95°)(15\angle 30°) = 239.55\angle 116.95° \ \ volts$$

Cuya senoide correspondiente es:

$$v''(t) = 239.55\,\text{sen}(2000t + 116.95°) \ \ volts$$

Por lo que el voltaje instantáneo en la bobina es:

$$v_L(t) = v_0 + v'(t) + v''(t)$$

$$v_L(t) = 79.9\,\text{sen}(1000t + 88.48°) + 239.55\,\text{sen}(2000t + 116.95°) \quad volts$$

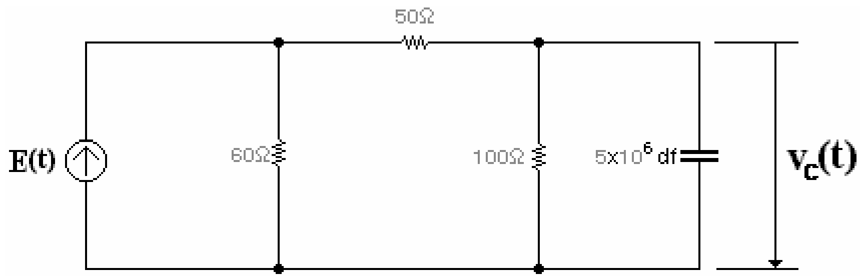
El voltaje instantáneo en el resistor de 500 Ω es:

$$v_R(t) = 500\,i_{fc}(t) \quad volts$$

$$v_R(t) = 2500 + 5000\,\text{sen}\,1000t + 7500\,\text{sen}(2000t + 30°) \quad volts$$

PROBLEMA 2

Calcule el voltaje instantáneo en el capacitor del circuito mostrado, cuando la fuente es $E(t) = 10 + 5\text{sen}(10^6 t + 60°)$ *volts*.

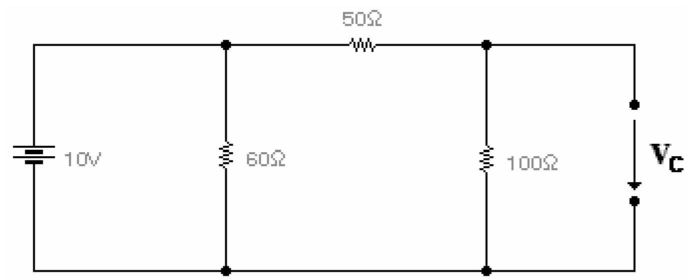


Solución:

<u>Red auxiliar de C.D.</u>

Consideremos el término constante de E(t). En corriente directa el capacitor se comporta como circuito abierto.

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(0)C} = \infty \quad \Omega$$

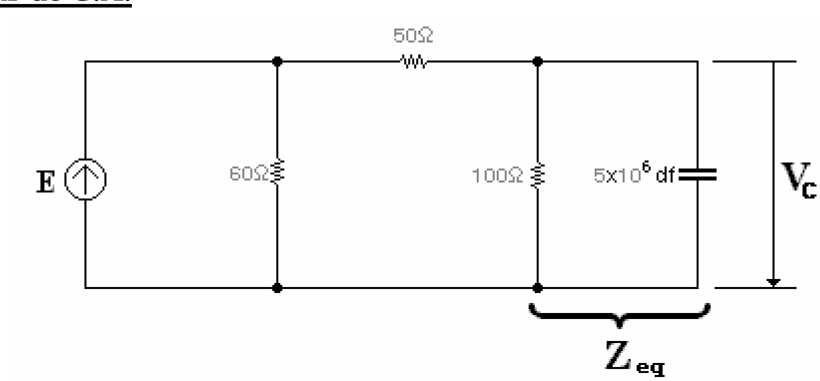


Por divisor de voltaje:

$$v_{100} = \frac{100(10)}{50+100} = \frac{10^3}{150} = 6.66 \quad volts$$

$$v_0 = 6.66 \quad volts \quad (v_0 = v_c)$$

<u>Red auxiliar de C.A.</u>



Consideremos ahora el término senoidal de $E(t)$.

$$E'(t) = 5\text{sen}(10^6 t + 60°) \leftrightarrow 5\underline{|60°}$$

para $\omega = 10^6 \; {rad}/{seg}$, $E' = 5\underline{|60°}$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{5x10^6 i}{\omega} = -\frac{5x10^6 i}{10^6}$$

$$Z_C = -5i \quad \Omega$$

A la impedancia en paralelo del resistor de 100Ω y el capacitor la designamos como Z_{eq} (indicada en la red auxiliar de C.A.).

$$Z_{eq} = \frac{100(-5i)}{100-5i} = \frac{500\underline{|-90°}}{100.125\underline{|-2.86°}}$$

$$Z_{eq} = 4.994\underline{|-87.14°} = 0.249 - 4.98i \cong 0.25 - 5i \quad \Omega$$

Aplicando divisor de voltaje para hallar el voltaje en el capacitor, tendremos:

$$V'_C = \frac{(Z_{eq})E'}{50 + Z_{eq}} = \frac{(4.994\underline{|-87.14°})(5\underline{|60°})}{50 + 0.25 - 5i} = \frac{25\underline{|-27.14°}}{50.25 - 5i} = \frac{25\underline{|-27.14°}}{50.5\underline{|-5.68°}}$$

$$V'_C = 0.495\underline{|-21.46°} \quad volts$$

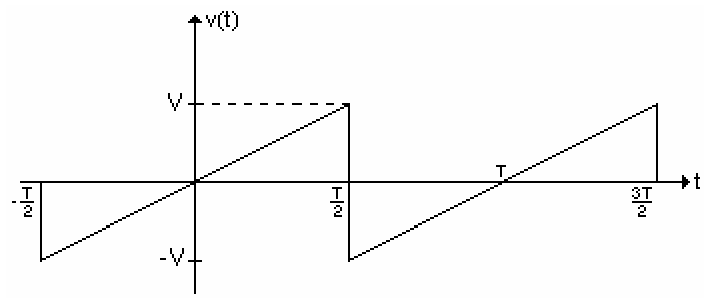
El voltaje instantáneo en el capacitor es la suma de las respuestas parciales de los términos de la fuente $E(t)$.

$$v_C(t) = v_0 + v'_C(t)$$

$$v_C(t) = 6.66 + 0.495\,\text{sen}\left(10^6 t - 21.46°\right) \quad volts$$

PROBLEMA 3

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la onda "diente de sierra" dada.



Solución:

En la figura se puede observar lo siguiente:

1. El valor medio de la función es cero.
2. La función es impar, por lo tanto sólo contendrá términos senos (todas las constantes a_n serán cero).

La serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + ... + b_1 \operatorname{sen}\omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + ...$$

En forma compacta :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t\right)$$

Los coeficientes de Fourier se calculan de:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t dt \qquad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\operatorname{sen} n\omega t dt \qquad n = 1,2,3,...$$

Cálculo de $\frac{a_0}{2}$.

Al sustituir n = 0 en a_n:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos 0\omega t)dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

En nuestro caso elegiremos $t_0 = -\frac{T}{2}$.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Pudimos tomar t_0=0, pero esto implicaría integrar dos intervalos de la función (de 0<t<T/2 y de T/2<t<T). Así que tomando t_0=–T/2 el único intervalo a integrar es T/2<t<T/2.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{2V}{T}\right)tdt = \frac{1}{T}\left(\frac{2V}{T}\right)\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{V}{T^2}\left[\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right] = 0$$

<u>Cálculo de a_n.</u>

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{2V}{T}t\cos n\omega t dt = \frac{4V}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} t\cos n\omega t dt.$$

Integrando por partes:

$$u = t \therefore du = dt$$

$$dv = \cos n\omega t dt \therefore v = \frac{1}{n\omega}\operatorname{sen} n\omega t$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

sustituyendo expresiones:

$$a_n = \frac{4V}{T^2}\left[\frac{t}{n\omega}\operatorname{sen} n\omega t\Bigg|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{n\omega}\operatorname{sen} n\omega t dt\right]$$

$$= \frac{4V}{T^2}\left[\underbrace{\frac{T}{2n\omega}\left(\operatorname{sen} n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2n\omega}\left(\operatorname{sen} n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right)}_{0} + \frac{1}{n^2\omega^2}\cos n\omega t\Bigg|_{-T/2}^{T/2}\right]$$

$$= \frac{4V}{T^2}\left[\frac{1}{n^2\omega^2}\cos n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} - \frac{1}{n^2\omega^2}\cos n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{4V}{T^2}\right)\left(\frac{1}{n^2\omega^2}\right)\left[\cos n\pi - \cos n(-\pi)\right] = 0$$

Cálculo de b_n.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}\,n\omega t dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2V}{T} t\,\mathrm{sen}\,n\omega t dt = \frac{4V}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} t\,\mathrm{sen}\,n\omega t dt$$

Integrando por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = t \therefore du = dt$$

$$dv = \mathrm{sen}\,n\omega t dt \therefore v = -\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t$$

$$b_n = \frac{4V}{T^2}\left\{\underbrace{-\frac{t}{n\omega}\cos n\omega t\Big|_{-T/2}^{T/2}}_{\boldsymbol{A}} + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t dt}_{\boldsymbol{B}}\right\}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{4V}{T^2}\left\{-\frac{T^2}{4\pi n}\cos n\omega\frac{T}{2} - \frac{T^2}{4n\pi}\cos n\omega\left(-\frac{T}{2}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{4V}{T^2}\left(\frac{T^2}{4n\pi}\right)\left\{-\cos n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} - \cos n\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right)\right\} = \frac{V}{n\pi}\left[-\cos n\pi - \cos n(-\pi)\right]$$

$$\boldsymbol{A} = -2\frac{V}{n\pi}\cos n\pi$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{n^2\omega^2}\mathrm{sen}\,n\omega t\Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{n^2\omega^2}\left[\mathrm{sen}\,n\left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{T}{2} - \mathrm{sen}\,n\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{n^2\omega^2}\left[\mathrm{sen}\,n\pi - \mathrm{sen}\,n(-\pi)\right] = 0$$

$$b_n = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = -\frac{2V}{n\pi}\cos n\pi \qquad\qquad n = 1,2,3...$$

La función cos $n\pi$ es positiva para n par y negativa para n impar, con lo que el signo de los coeficientes se alterna. Así, la serie trigonométrica de Fourier es:

$$f(t) = \frac{2V}{\pi}\left\{\mathrm{sen}\,\omega t - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\omega t + \frac{1}{3}\mathrm{sen}\,3\omega t - \frac{1}{4}\mathrm{sen}\,4\omega t + ...\right\}$$

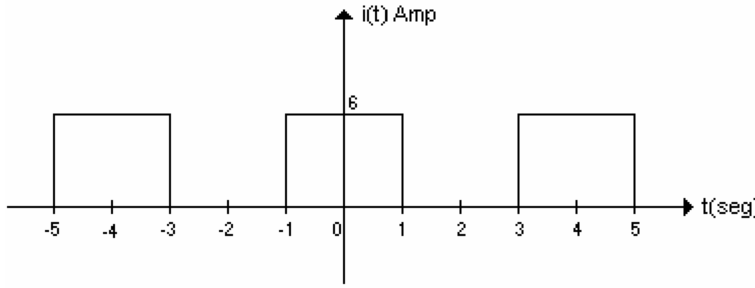
En forma compacta :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2V}{n\pi}(\cos n\pi)(\mathrm{sen}\,n\omega t)\right]$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2V}{n\pi}\mathrm{sen}\,n\omega t$$

PROBLEMA 4

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier para la corriente $i(t)$ dada por el pulso rectangular que se muestra.



Solución:

De la forma de onda dada se puede observar lo siguiente:

1. La función es par, por lo tanto la serie sólo contendrá términos cosenos (todas las constantes b_n serán cero) más una constante $\frac{a_0}{2}$.
2. La función es susceptible de tener simetría de media onda, por lo que la serie contendrá solamente términos impares cosenos más la constante $\frac{a_0}{2}$.
3. El valor medio de $i(t)$ es 3:

La serie trigonométrica de Fourier de $f(t)$ está dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \ldots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \ldots$$

En forma compacta :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t \right)$$

Cálculo de $\frac{a_0}{2}$.

Los límites de integración de la función $f(t)$ en un ciclo pueden tomarse en diversos intervalos, por ejemplo si tomamos t_0=0 debemos realizar tres integrales, en los siguientes intervalos:

$$f(t)=\begin{cases}6 & 0<t<1\\ 0 & 1<t<3\\ 6 & 3<t<4\end{cases}$$

Si t_0=-1, únicamente tenemos que realizar dos integrales:

$$f(t)=\begin{cases}6 & -1<t<1\\ 0 & 1<t<3\end{cases}$$

En la figura se ve que T=4 seg. por lo que

$$\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Eligiendo $t_0=-1$:

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\left[\int_{-1}^{1}6dt+\int_{1}^{3}0dt\right]=\frac{6}{4}t\Big|_{-1}^{1}=\frac{6}{4}[1+1]=3$$

Cálculo de a_n.

$$a_n=\frac{2}{4}\int_{-1}^{1}6\cos n\omega t dt+\frac{2}{4}\int_{1}^{3}0\cos n\omega t dt=3\int_{-1}^{1}\cos n\frac{\pi}{2}tdt=3\left(\frac{2}{n\pi}\right)\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}t\Big|_{-1}^{1}$$

$$a_n=\frac{6}{n\pi}\left[\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen} n\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{6}{n\pi}\left[\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen} n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{12}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}$$

Cálculo de b_n.

$$b_n=\frac{2}{4}\int_{-1}^{1}6\operatorname{sen} n\omega t dt+\frac{2}{4}\int_{1}^{3}0\operatorname{sen} n\omega t dt=\frac{3}{n\omega}(-\cos n\omega t)\Big|_{-1}^{1}$$

$$b_n=-\frac{3}{n\omega}[\cos n\omega(1)-\cos n\omega(-1)]; \qquad \omega=\frac{\pi}{2}$$

$$b_n=-\frac{6}{n\pi}\left[\cos n\frac{\pi}{2}-\cos n\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=0$$

De la expresión calculada para $a_n = \frac{12}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}$ se ve que $a_n = 0$ para n=2,4,6,… y para n impar los signos se alternan, por lo que la serie sólo contiene cosenos impares más una constante $\frac{a_0}{2}$. Así, la serie trigonométrica de Fourier es:

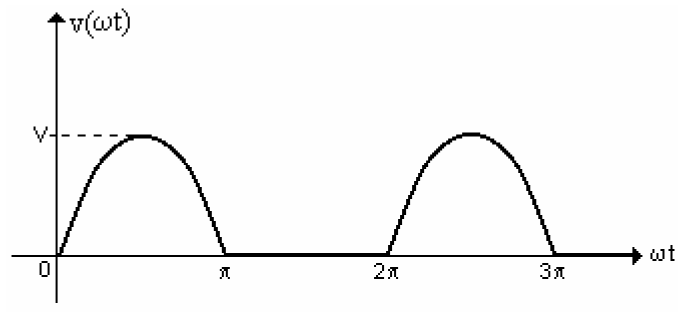
$$i(t) = 3 + \frac{12}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi t}{2} + ...\right)$$

En forma compacta :

$$i(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{2}t$$

PROBLEMA 5

Exprese mediante su serie trigonométrica de Fourier la señal senoidal rectificada de media onda que se muestra en la figura.



Solución:

Se observa que la función no presenta ningún tipo de simetría, por lo que no es par ni impar y la serie contendrá términos senos y cosenos.

La serie de Fourier tiene la forma:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t\right)$$

Cálculo de a_0.

Nótese que en este problema la variable es ωt.

$$v(t) = \begin{cases} V \operatorname{sen} \omega t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} V \operatorname{sen} \omega t d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d(\omega t)\right] = \frac{V}{2\pi}\left[-\cos \omega t\right]_0^{\pi} = -\frac{V}{2\pi}\left[\cos\pi - \cos 0\right]$$

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{V}{2\pi}\left[-1-1\right] = \frac{V}{\pi}$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t d(\omega t)$$

$$f(t) = \begin{cases} V\text{sen}\,\omega t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Se observa que $T = 2\pi$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} V\text{sen}\,\omega t\cos n\omega t d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d(\omega t)\right] = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\omega t\cos n\omega t d(\omega t)$$

Auxiliándonos en tablas de integrales la función a integrar tiene la forma:

$$\int_0^{\pi}\text{sen}\,mx\cos nxdx \qquad donde \quad m = 1,\ \ n = n,\ \ x = \omega t$$

cuya solución es :

$$\int_0^{\pi}\text{sen}\,\omega t\cos n\omega t d(\omega t) = \left\{-\frac{\cos[(1+n)\omega t]}{2(1+n)} - \frac{\cos[(1-n)\omega t]}{2(1-n)}\right\}_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\cos[(1+n)\pi]}{2(1+n)} - \frac{\cos[(1-n)\pi]}{2(1-n)} + \frac{\cos[(1+n)0]}{2(1+n)} + \frac{\cos[(1-n)0]}{2(1-n)}$$

$$= -\frac{\cos(\pi+n\pi)}{2(1+n)} - \frac{\cos(\pi-n\pi)}{2(1-n)} + \frac{\cos 0}{2(1+n)} + \frac{\cos 0}{2(1-n)}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas siguientes:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b \qquad \text{y}$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

obtenemos:

$$=-\frac{\cos\pi\cos n\pi - \text{sen}\pi\,\text{sen}\,n\pi}{2(1+n)} - \frac{\cos\pi\cos n\pi + \text{sen}\pi\,\text{sen}\,n\pi}{2(1-n)} + \frac{\cos 0}{2(1+n)} + \frac{\cos 0}{2(1-n)}$$

$$= \frac{\cos n\pi}{2(1+n)} + \frac{\cos n\pi}{2(1-n)} + \frac{2}{2(1-n^2)} = \cos n\pi\left[\frac{(1-n)+(1+n)}{2(1-n^2)}\right] + \frac{1}{(1-n^2)}$$

$$= \cos n\pi \left[\frac{2}{2(1-n^2)} \right] + \frac{1}{(1-n^2)} = \frac{\cos n\pi}{1-n^2} + \frac{1}{1-n^2} = \frac{\cos n\pi + 1}{1-n^2}$$

pero

$$a_n = \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{\cos n\pi + 1}{1-n^2} \right] = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + 1)$$

$$a_n = \frac{2V}{\pi(1-n^2)} \qquad \text{para} \quad n = 2,4,6,...$$

y $a_n = 0$ para $n = 3,5,7,...$

Cuando n=1 la expresión para $a_n = \dfrac{V}{\pi(1-n^2)}(\cos n\pi + 1)$ se indetermina, por lo que habrá que evaluarla por separado para n=1.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \text{sen } \omega t \cos \omega t d(\omega t)$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica $\text{sen } x \cos x = \frac{1}{2} \text{sen } 2x$, obtenemos:

$$a_1 = \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[-\frac{1}{4} \cos 2\omega t \right]_0^{\pi} = -\frac{V}{4\pi} [\cos 2\pi - \cos 0]$$

$$a_1 = 0$$

por lo que, finalmente $a_n = 0$ para $n = 1,3,5,7,...$

Cálculo de b_n.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \text{sen } n\omega t d(\omega t)$$

$$v(t) = \begin{cases} V \text{ sen } \omega t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$T = 2\pi$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} V \text{ sen } \omega t \text{ sen } n\omega t d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0 d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \omega t \text{ sen } n\omega t d(\omega t) \right]$$

Por tablas de integrales:

$$\int \text{sen } mx \text{ sen } nx dx = -\frac{\text{sen}[(m+n)x]}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}[(m-n)x]}{2(m-n)} + c$$

donde $m = 1, n = n$ y $x = \omega t$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) = \left\{ -\frac{\operatorname{sen}[(1+n)\omega t]}{2(1+n)} + \frac{\operatorname{sen}[(1-n)\omega t]}{2(1-n)} \right\}_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}[(1+n)\pi]}{2(1+n)} + \frac{\operatorname{sen}[(1-n)\pi]}{2(1-n)} + \frac{\operatorname{sen}[(1+n)0]}{2(1+n)} - \frac{\operatorname{sen}[(1-n)0]}{2(1-n)} *$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}(\pi + n\pi)}{2(1+n)} + \frac{\operatorname{sen}(\pi - n\pi)}{2(1-n)}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas siguientes:

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$ y
$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$

$$= \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\pi \cos n\pi + \cos\pi \operatorname{sen} n\pi}{2(1+n)}}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\pi \cos n\pi - \cos\pi \operatorname{sen} n\pi}{2(1-n)}}_{\mathbf{B}}$$

$\mathbf{A} = 0 \qquad \forall \; n.$

$$\mathbf{B} = \frac{\operatorname{sen}\pi \cos n\pi - \cos\pi \operatorname{sen} n\pi}{2(1-n)} = \frac{0}{2(1-n)} = 0 \qquad \forall \; n \neq 1$$

y

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) = 0 \quad \forall \; n \neq 1$$

pero $b_n = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t)$

$$b_n = \frac{V}{\pi}\left[\frac{0}{2(1-n)}\right] = 0 \quad \forall \; n \neq 1$$

con n=1 la expresión para b_n se indetermina, por lo que b_1 deberá evaluarse por separado.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V\operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi}\left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\omega t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{V}{2}$$

Sustituyendo valores en la serie de Fourier dada por:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \ldots + b_1 \operatorname{sen}\omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \ldots$$

* Puede verse que la integral buscada vale cero para toda $n \neq 1$, sin embargo se hace un desarrollo similar al que se usó para el cálculo de a_n con el fin de clarificar el resultado.

obtenemos

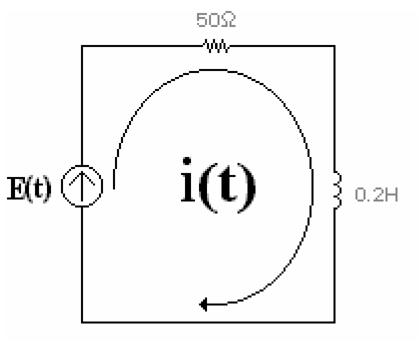
$$v(t) = \frac{V}{\pi} + \frac{2V}{\pi(1-4)}\cos 2\omega t + \frac{2V}{\pi(1-16)}\cos 4\omega t + \frac{2V}{\pi(1-36)}\cos 6\omega t + ... + \frac{V}{2}\operatorname{sen}\omega t$$

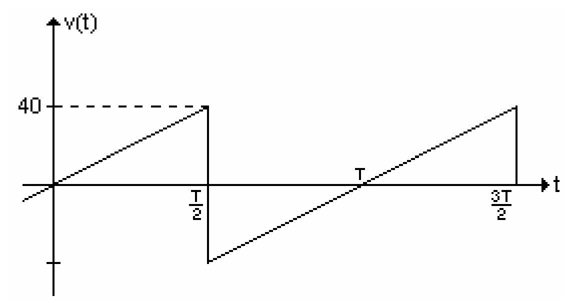
$$v(t) = \frac{V}{\pi} - \frac{2V}{\pi}\left[\frac{\cos 2\omega t}{3} + \frac{\cos 4\omega t}{15} + \frac{\cos 6\omega t}{35} + ...\right] + \frac{V}{2}\operatorname{sen}\omega t$$

$$v(t) = \frac{V}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - ...\right]$$

PROBLEMA 6

Se aplica la señal de la gráfica al circuito mostrado. Encuentre la corriente instantánea i(t). Considere $\omega=10^3$ *rad/seg.*





Solución:

La señal en diente de sierra de la figura ha sido analizada en el problema núm. 3, habiéndose obtenido la serie de Fourier siguiente:

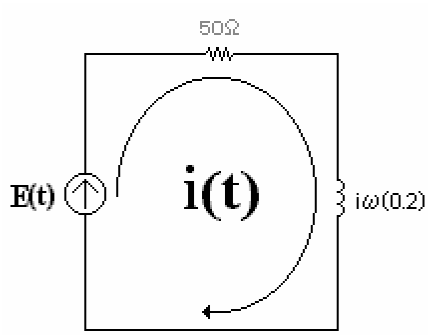
$$v(t) = \frac{2V}{\pi}\left[\operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\omega t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\omega t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\omega t + ...\right]$$

Sustituyendo valores y con una aproximación de los tres primeros armónicos de la serie, tendremos

$$E(t) = 25.46\operatorname{sen}1000t - 12.73\operatorname{sen}2000t + 8.48\operatorname{sen}3000t - \dots$$

Analizaremos ahora la red dada como una red con multifrecuencias.

<u>Red auxiliar de C.A.</u>



Empleando superposición tendremos:
Primer armónico de la serie o término fundamental

$$E'(t) = 25.46\,\mathrm{sen}\,1000t \leftrightarrow E' = 25.46\underline{|0°}$$

Para $\omega = 1000 \, {}^{rad}\!/_{seg}$ la impedancia de la red es

$$Z'_T = 50 + i(10^3)(.2) = 50 + 200i = 206.15\underline{|75.96°} \quad \Omega$$

$$I' = \frac{E'}{Z'_T} = \frac{25.46\underline{|0°}}{206.15\underline{|75.96°}} = 123.5x10^{-3}\underline{|-75.96°} \quad amp.$$

Por lo que la función senoidal correspondiente es

$$i'(t) = 123.5x10^{-3}\text{sen}(1000t - 75.96°) \quad amp.$$

Segundo armónico

$$E''(t) = -12.73\text{sen}2000t \leftrightarrow E'' = 12.73\underline{|-180°} \quad \text{volts}$$

Para $\omega = 2000 \, {}^{rad}\!/_{seg}$

$$Z''_T = 50 + i(2x10^3)(0.2) = 50 + 400i = 403.11\underline{|82.87°} \quad \Omega$$

$$I'' = \frac{E''}{Z''_T} = \frac{12.73\underline{|-180°}}{403.11\underline{|82.87°}} = 31.57x10^{-3}\underline{|-262.87°} = 31.57x10^{-3}\underline{|97.13°} \quad amp.$$

$$i''(t) = 31.57x10^{-3}\text{sen}(2000t + 97.13°) \quad amp.$$

Tercer armónico

$$E'''(t) = 8.48\text{sen}3000t \leftrightarrow E''' = 8.48\underline{|0°}$$

Para $\omega = 3000 \, {}^{rad}\!/_{seg}$ la impedancia de la red es

$$Z'''_T = 50 + i(3x10^3)(0.2) = 50 + 600i = 602\underline{|85.23°} \, \Omega$$

$$I''' = \frac{E'''}{Z'''_T} = \frac{8.48\underline{|0°}}{602\underline{|85.23°}} = 14.08x10^{-3}\underline{|-85.23°} \quad amp.$$

$$i'''(t) = 14.08x10^{-3}\text{sen}(3000t - 85.23°) \quad amp.$$

La suma de las corrientes parciales halladas es la corriente instantánea del circuito.

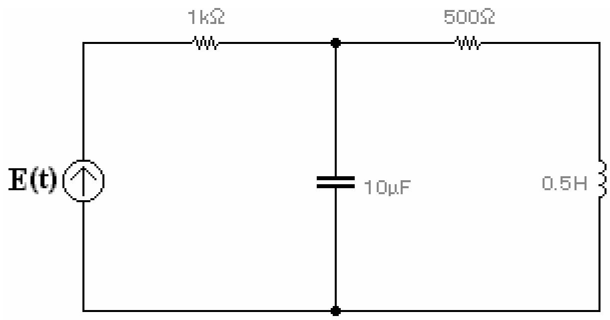
$$i(t) = i'(t) + i''(t) + i'''(t)$$

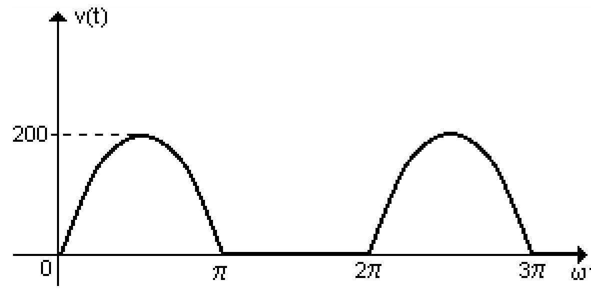
$$i(t) = 123.5x10^{-3}\mathrm{sen}(1000t - 75.96°) + 31.57x10^{-3}\mathrm{sen}(2000t + 97.13°)$$

$$+ 14.08x10^{-3}\mathrm{sen}(3000t - 85.23°) \quad amp.$$

PROBLEMA 7

Encuentre la corriente instantánea que circula por la bobina de la red mostrada cuando *E*(*t*) está dado por la señal rectificada de media onda mostrada en la gráfica. Considere ω=377 *rad/seg.*





Solución:

La señal rectificada de media onda ha sido analizada en el problema número 5, habiéndose obtenido la serie de Fourier siguiente:

$$v(t) = \frac{V}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right]$$

Sustituyendo valores y con una aproximación de los tres primeros términos de la serie, tendremos:

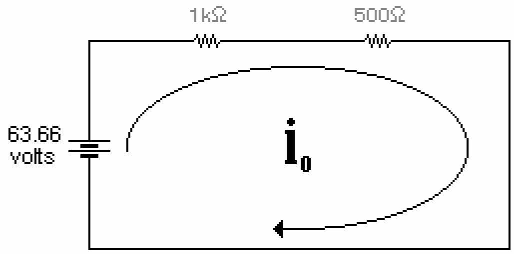
$$E(t) = \frac{200}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}377t - \frac{2}{3}\cos 754t - \ldots\right]$$

$$E(t) = 63.66 + 100\operatorname{sen}377t - 42.44\operatorname{sen}(754t + 90°) - \ldots$$

Analizaremos ahora la red dada como una red con multifrecuencias.

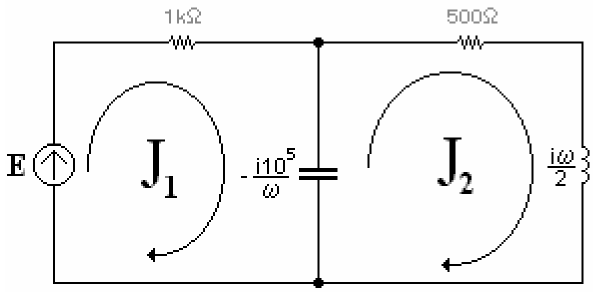
<u>Red auxiliar de C.D.</u>

En corriente directa la bobina se comporta como corto circuito y el capacitor como circuito abierto, por lo que el circuito resultante es:



$$i_0 = \frac{63.66}{1.5x10^3} = 42.44x10^{-3} \quad amp.$$

Red auxiliar de C.A.



Consideremos el primer término senoidal o primer armónico.

$$E'(t) = 100\text{sen}377t \leftrightarrow \text{E}' = 100\angle 0°$$

Para $\omega = 377 \, {}^{rad}\!/_{seg}$ las impedancias de los elementos reactivos valen:

$$Z_C = -\frac{i10^5}{377} = -265i$$

$$Z_L = i(377)\left(\frac{1}{2}\right) = 188.5i$$

Aplicando el método de mallas:

$$Z_{11} J_1 + Z_{12} J_2 = 100\angle 0°$$

$$Z_{21} J_1 + Z_{22} J_2 = 0$$

$$Z_{11} = 1000 - 265i$$

$$Z_{22} = 500 - 265i + 188.5i = 500 - 76.5i$$

$$Z_{12} = -(-265i) = 265i$$

Sustituyendo las impedancias de mallas en las ecuaciones del método

$$10^2(10 - 2.65i)\,J_1 + 10^2(2.65i)\,J_2 = 100$$

$$10^2(2.65i)\,J_1 + 10^2(5 - .765i)\,J_2 = 0$$

éstas se reducen a

$$(10 - 2.65i)\,J_1 + (2.65i)\,J_2 = 1$$

$$(2.65i)\,J_1 + (5 - .765i)\,J_2 = 0$$

$$I' = J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-2.65i & 1 \\ 2.65i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-2.65i & 2.65i \\ 2.65i & 5-0.765i \end{vmatrix}} = \frac{-2.65i}{55-20.9i} = \frac{2.65\angle -90^\circ}{58.83\angle -20.8^\circ} = .045\angle -69.2 \quad amp.$$

La función senoidal correspondiente es

$$i'(t) = .045\text{sen}(377t - 69.2^\circ) \quad amp.$$

Consideremos ahora el segundo armónico

$$E''(t) = \text{-}42.44\text{sen}(754t + 90^\circ) \leftrightarrow E'' = 42.44\angle -90^\circ$$

Para $\omega = 754 \, {}^{rad}/_{seg}$ las impedancias de los elementos reactivos valen ahora

$$Z_C = -\frac{\text{i}10^5}{754} = -132.62i$$

$$Z_L = i(754)(0.5) = 377i$$

Aplicando nuevamente el método de mallas :

$$Z_{11} = 1000 - 132.62i$$

$$Z_{22} = 500 - 132.62i + 377i = 500 + 244.37i$$

$$Z_{21} = -(-132.62i) = 132.62i$$

Las nuevas ecuaciones son :

$$(1000\text{-}132.62i)\,J_1 + 132.62i\,J_2 = -42.44i$$

$$132.62i\,J_1 + (500 + 244.37i)\,J_2 = 0$$

que se reducen a :

$$(10\text{-}1.32i)\,J_1 + 1.32i\,J_2 = -0.42i$$

$$1.32i\,J_1 + (5 + 2.44i)\,J_2 = 0$$

$$I'' = J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10-1.32i & -0.42i \\ 1.32i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-1.32i & 1.32i \\ 1.32i & 5+2.44i \end{vmatrix}} = \frac{-0.554}{54.96+17.8i} = \frac{-0.554}{57.77\underline{|17.94°}} = -9.6x10^{-3}\underline{|-17.94°} \quad amp.$$

$$i''(t) = -9.6x10^{-3}\text{sen}(754t-17.94°) = 9.6x10^{-3}\text{sen}(754t-197.94°) \quad amp.$$

Finalmente, la corriente instantánea que circula por la bobina es la suma de las corrientes parciales halladas, esto es:

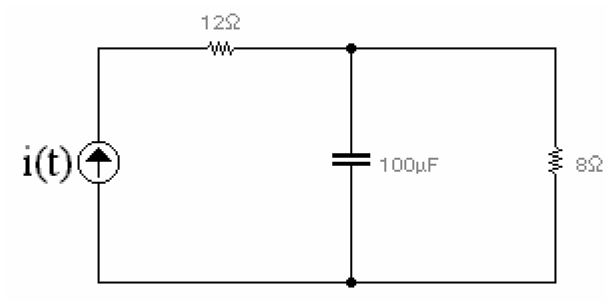
$$i_L(t) = i_0 + i'(t) + i''(t)$$

$$i_L(t) = 42.44x10^{-3} + 0.045\text{sen}(377t-69.2°) + 9.6x10^{-3}\text{sen}(754t-197.94°) \quad amp.$$

PROBLEMA 8

En el circuito mostrado calcule la tensión y la intensidad de corriente eficaces en el capacitor cuando la fuente proporciona una señal de la forma

$$i(t) = 15 + 5\cos\omega t + 2\text{sen}(3\omega t + 90°)\ amp.$$



Solución:

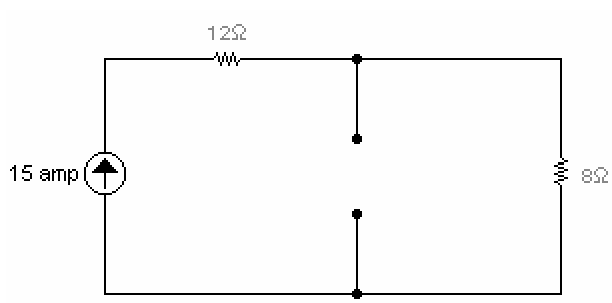
Las expresiones para calcular la tensión y la intensidad de corriente eficaces son:

$$V_{ef} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} V_n^2}$$

$$I_{ef} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} I_n^2}$$

<u>Cálculo de la corriente eficaz en el capacitor</u>

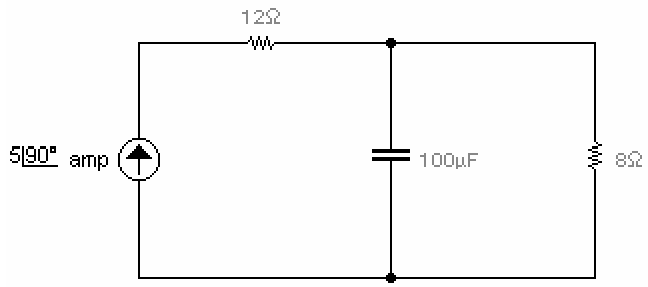
<u>Red auxiliar de C.D.</u>



En C.D. no circula corriente por el capacitor, por comportarse como circuito abierto.

$$I_0 = 0$$

Red auxiliar de C.A.



Para $\omega = 1000 \, {rad}/{seg}$

$$i'(t) = 5\cos(1000t) = 5\mathrm{sen}(1000t + 90°) \leftrightarrow I' = 5\underline{|90°}$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(10^3)(10^2)(10^{-6})} = -10i$$

$$I'_C = \frac{(5\underline{|90°})(8)}{8-10i} = \frac{40\underline{|90°}}{12.80\underline{|-51.34°}} = 3.125\underline{|141.34°} \quad amp.$$

$$i'_C(t) = 3.125\mathrm{sen}(1000t + 141.34°) \quad amp.$$

Para $\omega = 3000 \, {rad}/{seg}$

$$i''(t) = 2\mathrm{sen}(3000t + 90°) \leftrightarrow I'' = 2\underline{|90°}$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{i(3)(10^3)(10^2)(10^{-6})} = -3.33i$$

$$I''_C = \frac{(2\underline{|90°})(8)}{8-3.33i} = \frac{16\underline{|90°}}{8.66\underline{|-22.6°}} = 1.84\underline{|112.6°} \quad amp.$$

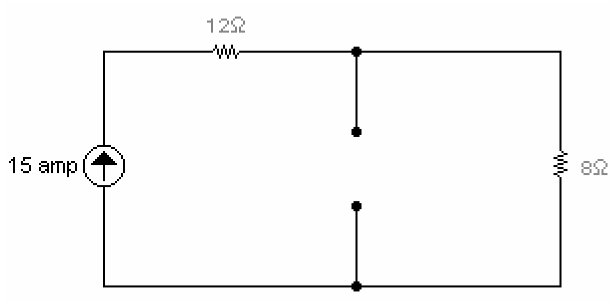
$$i''_C(t) = 1.84\mathrm{sen}(3000t + 112.6°) \quad amp.$$

Aplicando la fórmula para encontrar I_{ef}

$$I_{ef} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} I_n^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(3.125^2 + 1.84^2\right)} = 2.56 \quad amp.$$

Cálculo de la tensión eficaz en el capacitor

Red auxiliar de C.D.



$V_0 = (15)(8) = 120 \quad volts$

Red auxiliar de C.A.

Para $\omega = 1000\, {}^{rad}\!/_{seg}$

$V'_C = Z'_C I'_C = (10\angle{-90°})(3.125\angle{141.34°}) = 31.25\angle{51.34°} \quad volts$

$v'_C(t) = 31.25\text{sen}(1000t + 51.34°) \quad volts$

Para $\omega = 3000\, {}^{rad}\!/_{seg}$

$V''_C = Z''_C I''_C = (3.33\angle{-90°})(1.84\angle{112.6°}) = 6.12\angle{22.6°} \quad volts$

$v''_C(t) = 6.12\text{sen}(3000t + 22.6°) \quad volts$

Aplicando la fórmula para encontrar V_{ef}

$$V_{ef} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} V_n^2} = \sqrt{120^2 + \frac{1}{2}\left(31.25^2 + 6.12^2\right)} = 122 \quad volts$$

PROBLEMA 9

Se aplica una tensión $v(t) = 25 + 40\cos(\omega t - 60°) - 8\,\text{sen}(3\omega t + 75°) + 10\,\text{sen}\,\omega t$ *volts* a las terminales de un circuito pasivo, siendo la intensidad que resulta $i(t) = 5 + 3\,\text{sen}(\omega t - 30°) + 2\cos 3\omega t + 0.5\cos(5\omega t - 10°)$ *amp*. Calcule la potencia media del circuito.

Expresando las funciones dadas en términos de senos de amplitud positiva:

$$vt) = 25 + 40\,\text{sen}(\omega t + 30°) + 8\,\text{sen}(3\omega t - 105°) + 10\,\text{sen}\,5\omega t \quad volts$$

$$i(t) = 5 + 3\,\text{sen}(\omega t - 30°) + 2\,\text{sen}(3\omega t + 90°) + 0.5\,\text{sen}(5\omega t + 80°) \quad amp.$$

La fórmula para calcular la potencia media es:

$$P_m = V_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n)$$

Donde V_0 e I_0 son los términos de C.D. y V_n e I_n son las amplitudes de cada término de C.A. Así

$V_0 = 25$	$V_1 = 40$	$V_2 = 8$	$V_3 = 10$
$I_0 = 5$	$I_1 = 3$	$I_2 = 2$	$I_3 = 0.5$

$$\alpha_1 - \beta_1 = 30° - (-30°) = 60°$$
$$\alpha_2 - \beta_2 = -105° - 90° = -195°$$
$$\alpha_3 - \beta_3 = 0° - 80° = -80°$$

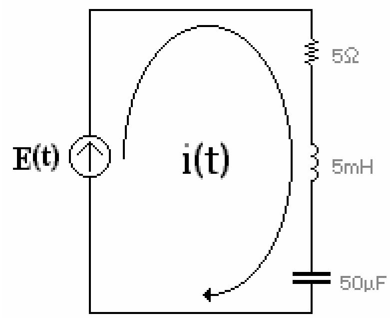
Sustituyendo valores:

$$P_m = (25)(5) + \frac{1}{2}\left[40x3\cos 60° + 8x2\cos(-195°) + 10x0.5\cos(-80°)\right] =$$

$$P_m = 125 + \frac{1}{2}\left(60 - 15.45 + 0.868\right) = 147.70 \quad watts$$

PROBLEMA 10

En el circuito mostrado calcule la corriente eficaz y la potencia media (activa) si se aplica una tensión $E(t) = 15 + 150\,\text{sen}\,1000t + 100\,\text{sen}\,2000t + 75\,\text{sen}\,3000t \quad volts.$



Solución:

$V_0 = 15$ volts; $I_0 = 0$ *amp.*

Para $\omega = 1000\, {}^{rad}\!/\!_{seg}$

$E'(t) = 150\text{sen}1000t \leftrightarrow E' = 150\underline{|0°} \quad volts$

$Z_T = 5 + 5i + \dfrac{1}{i(10^3)(50)(10^{-6})} = 5 - 15i = 15.81\underline{|-71.56°} \quad \Omega$

$I' = \dfrac{E'}{Z_T} = \dfrac{150\underline{|0°}}{15.81\underline{|-71.56°}} = 9.48\underline{|71.56°} \quad amp.$

$i'(t) = 9.48\text{sen}(1000t + 71.56°) \quad amp.$

Para $\omega = 2000\, {}^{rad}\!/\!_{seg}$

$E''(t) = 100\text{sen}2000t \leftrightarrow E'' = 100\underline{|0°} \quad volts$

$Z_T = 5 + 10i - 10i = 5 \quad \Omega$

$I'' = \dfrac{E''}{Z_T} = \dfrac{100\underline{|0°}}{5} = 20\underline{|0°} \quad amp.$

$i''(t) = 20\text{sen}2000t \quad amp.$

para $\omega = 3000\, {rad}/{seg}$

$$E'''(t) = 75\text{sen}3000t \leftrightarrow E''' = 75\underline{|0°} \quad volts$$

$$Z_T = 5 + 15i - 6.66i = 5 + 8.34i = 9.72\underline{|59°} \quad \Omega$$

$$I''' = \frac{E'''}{Z_T} = \frac{75\underline{|0°}}{9.72\underline{|59°}} = 7.71\underline{|-59°} \quad amp.$$

$$i'''(t) = 7.71\text{sen}(3000t - 59°) \quad amp.$$

Por lo que la corriente instantánea del circuito es

$$i(t) = I_0 + i'(t) + i''(t) + i'''(t)$$

$$i(t) = 9.48\text{sen}(1000t + 71.56°) + 20\text{sen}2000t + 7.71\text{sen}(3000t - 59°) \quad amp.$$

Para calcular la corriente eficaz aplicamos

$$I_{ef} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n^2} = \sqrt{+\frac{1}{2}\left(9.48^2 + 20^2 + 7.71^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(89.87 + 400 + 59.44\right)} = \sqrt{274.65}$$

$$I_{ef} = 16.57 \quad amp.$$

La potencia media o activa se calcula mediante la fórmula

$$P_m = V_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} V_n I_n \cos\left(\alpha_n - \beta_n\right)$$

$$P_m = \frac{1}{2}\left[150x9.48\cos(0° - 71.56°) + 100x20\cos(0°) + 75x7.71\cos(0° + 59°)\right]$$

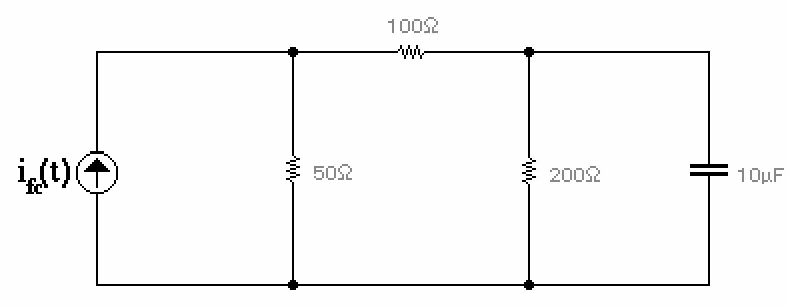
$$P_m = \frac{1}{2}(450 + 2000 + 298)$$

$$P_m = 1374 \quad watts$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

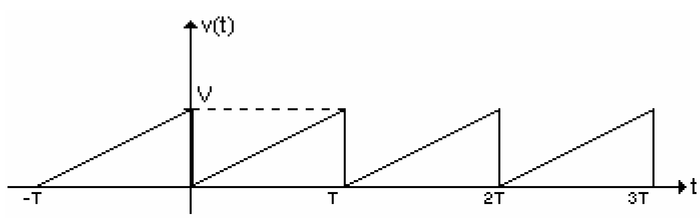
PROBLEMA 1

Calcule el voltaje instantáneo en el capacitor cuando la fuente de corriente es $i_{fc}(t) = 20 + 30\,\text{sen}(500t + 30°)$ *amp.*



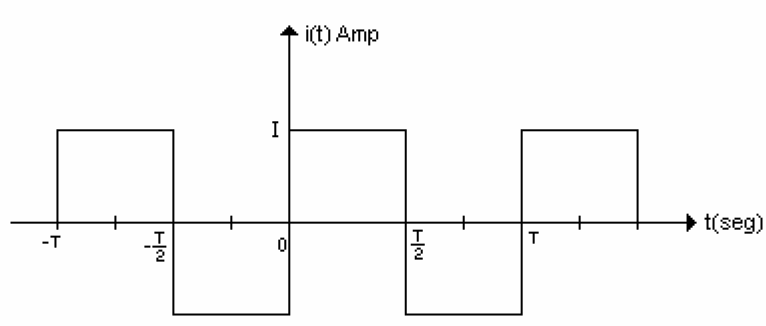
PROBLEMA 2

Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la señal “diente de sierra” dada.



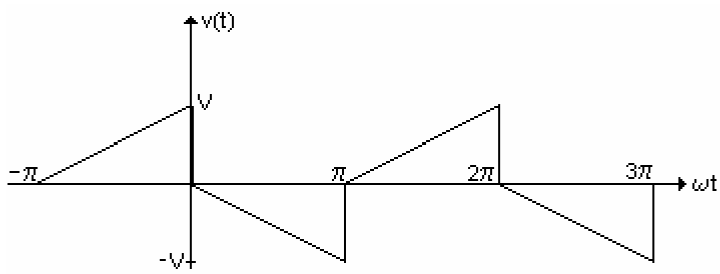
PROBLEMA 3

Determine la serie trigonométrica de Fourier para la onda cuadrada de la figura.



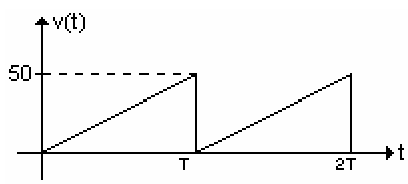
PROBLEMA 4

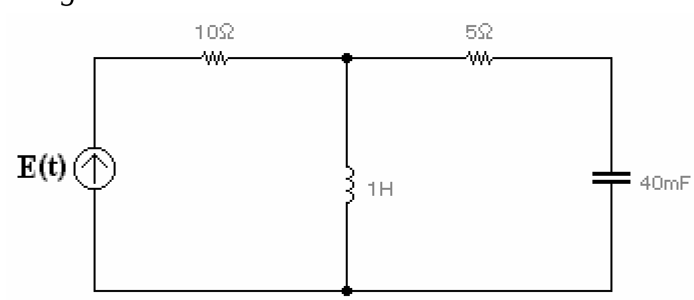
Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la onda mostrada en la figura.



PROBLEMA 5

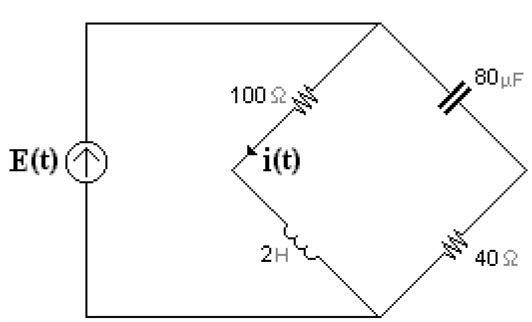
Se aplica la señal de la gráfica al circuito mostrado. Encuentre el voltaje instantáneo en el capacitor. Considere ω=10 *rad/seg.*





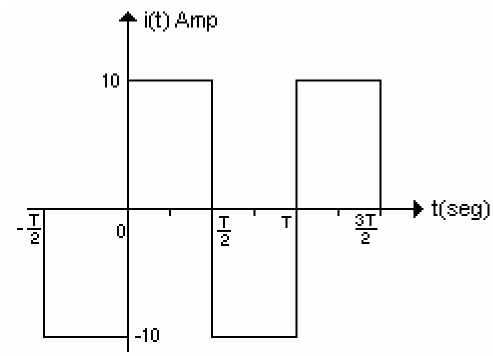
PROBLEMA 6

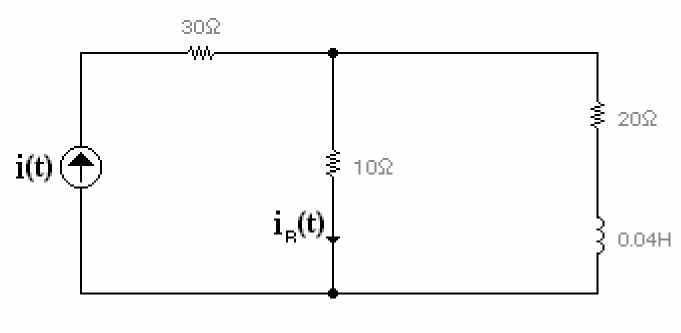
Dado *E(t)* = 20sen500*t* + 50sen(100*t* + 30°) *volts*, calcule la corriente instantánea que se indica en el circuito mostrado.



PROBLEMA 7

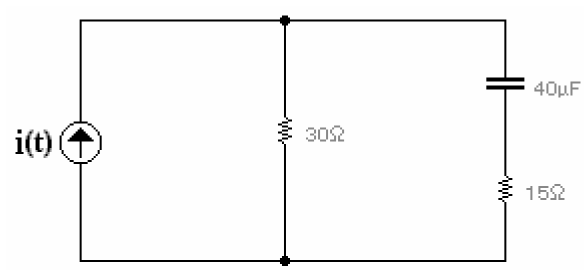
Encuentre la corriente instantánea $i_R(t)$ que circula por el resistor de 10Ω de la red mostrada cuando *i(t)* está dada por la señal de la gráfica. Considere ω = 200 *rad/seg.*





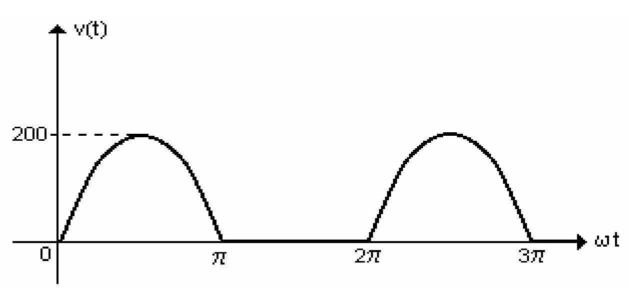
PROBLEMA 8

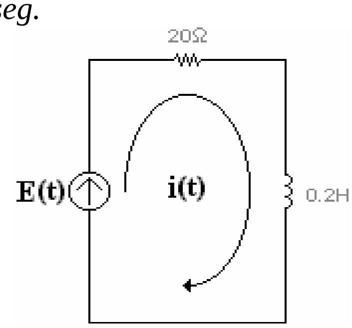
Calcule el voltaje y la corriente eficaces, así como la potencia media en el resistor de 15Ω cuando la fuente es $i(t) = 5 + 2\,\text{sen}\,\omega t + 3\,\text{sen}(2\omega t + 60°) + 5\,\text{sen}(3\omega t - 30°)$ *amp.* Considere $\omega = 1000 \, {}^{rad}\!/_{seg}$.



PROBLEMA 9

Si E(t) está dado por la señal rectificada de media onda de la gráfica como $E(t) = 0.318V + 0.5V\,\text{sen}\,\omega t - 0.212V\cos 2\omega t - 0.0424V\cos 4\omega t - ...$ (utilice solamente los tres primeros términos para representar $E(t)$), encuentre la corriente instantánea $i(t)$ que circula por el circuito mostrado, así como la corriente eficaz y la potencia activa total consumida por el circuito. Considere ω = 377 *rad/seg.*





PROBLEMA 10

Se aplica una tensión $v(t) = 60 + 20\,\text{sen}\,\omega t + 80\,\text{sen}(2\omega t + 50°)$ *volts* a las terminales de un circuito pasivo, siendo la intensidad que resulta

$$i(t) = 2 + 5\,\text{sen}(\omega t + 60°) + 3\,\text{sen}(2\omega t - 20°) \quad amp.$$

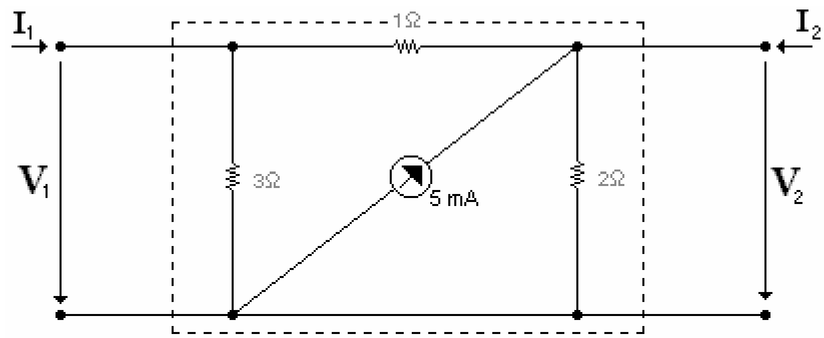
Calcule la tensión y corriente eficaces, así como la potencia media consumida por el circuito.

CAPÍTULO VI

REDES DE DOS PUERTOS

PROBLEMA 1

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de circuito abierto.

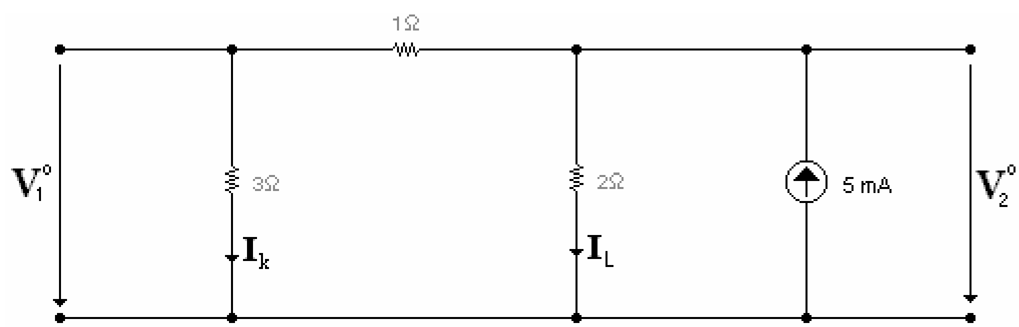


Solución:

Los parámetros de circuito abierto son los parámetros *Z*. Las ecuaciones con estos parámetros para una red activa son:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + V_1^0$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + V_2^0$$

Calculemos primeramente V_1^0 y V_2^0 que son los voltajes debidos a la fuente interna con las terminales del cuadripolo abiertas, como se muestra:



Por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{2(5x10^{-3})}{4+2} = \frac{10x10^{-3}}{6} = \frac{10^{-2}}{6} \quad amp.$$

$$V_1^0 = 3 I_k = 3\left(\frac{10^{-2}}{6}\right) = 5x10^{-3} \quad volts.$$

$$I_L = \frac{4(5x10^{-3})}{6} = \frac{10}{3}x10^{-3} \quad amp.$$

$$V_2^0 = 2\,I_L = 2\left(\frac{10}{3}x10^{-3}\right) = \frac{2}{3}x10^{-2} \quad volts.$$

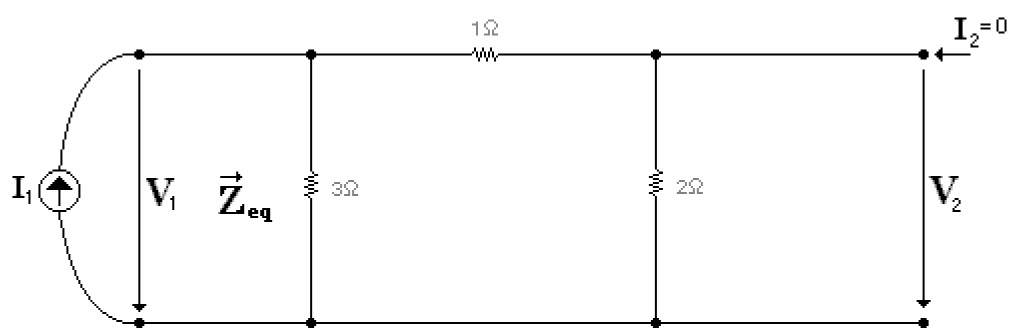
Para calcular los parámetros $Z_{k,l}$ debemos pacificar el cuadripolo (anular fuentes reales) y excitar las terminales correspondientes según las condiciones requeridas.

Cálculo de Z_{11} y Z_{21}

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad \rightarrow \quad \text{Impedancia de entrada } [\Omega].$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad \rightarrow \quad \text{Impedancia de transferencia directa } [\Omega].$$

En ambos parámetros se tiene la condición de que $I_2 = 0$, por lo que la configuración correspondiente es:



$$Z_{11} = \left.\frac{I_1(Z_{eq})}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{3(3)}{3+3} = \frac{9}{6} = 1.5 \quad \Omega$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

La corriente que pasa por el resistor de 2Ω es:

$$I_{2\Omega}=\frac{3I_1}{3+3}=\frac{I_1}{2}\quad amp.$$

Por tanto $V_2=2\left(\frac{1}{2}I_1\right)=(1)I_1$ *volt* y

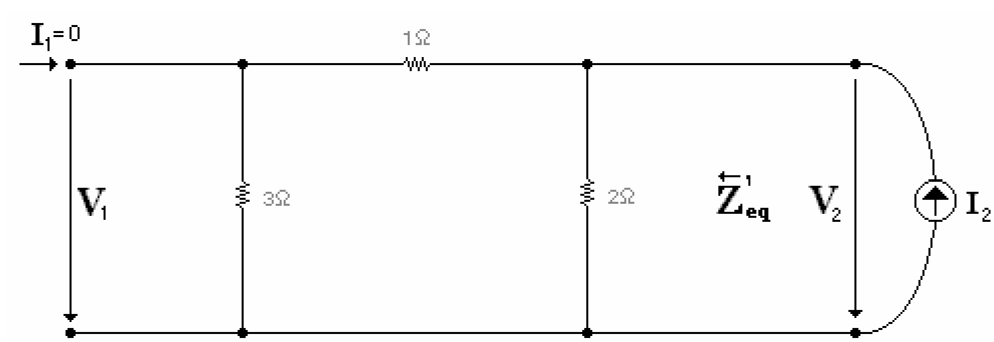
$$Z_{21}=\left.\frac{(1)I_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=1\ \Omega$$

Cálculo de Z_{12} y Z_{22}

$$Z_{12}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}\rightarrow$$ Impedancia de transferencia inversa [Ω].

$$Z_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}\rightarrow$$ Impedancia de salida [Ω].

En ambos parámetros se tiene la condición de que I_1 = 0, por lo que la configuración correspondiente es:



$$Z_{12}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}=\frac{3\left[\frac{2I_2}{4+2}\right]}{I_2}=1\ \ \Omega$$

Se comprueba que en una red puramente pasiva (no contiene en su interior fuentes de ningún tipo) $Z_{21} = Z_{12}$.

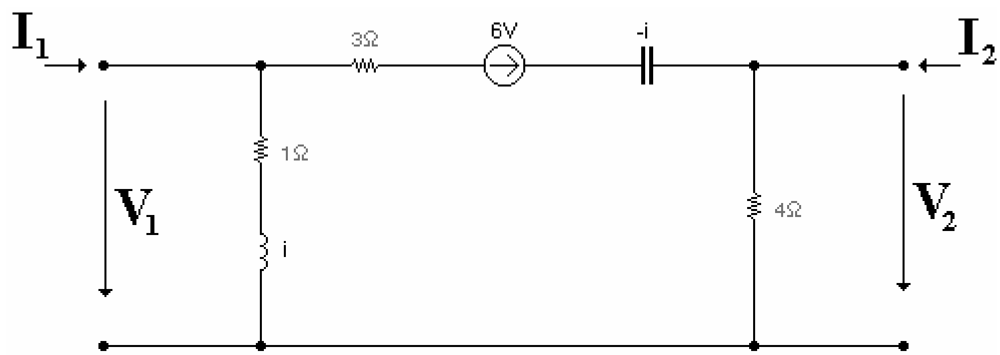
$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{Z'_{eq} I_2}{I_2} = \frac{(4)(2)}{4+2} = \frac{4}{3} \quad \Omega$$

Con los resultados obtenidos podemos establecer las ecuaciones que caracterizan a la red.

$$V_1 = 1.5\, I_1 + (1)\, I_2 + 5x10^{-3} \quad volts$$
$$V_2 = (1)\, I_1 + \frac{4}{3} I_2 + \frac{2}{3} x10^{-2} \quad volts$$

PROBLEMA 2

Caracterice el siguiente circuito mediante sus parámetros de circuito abierto y obtenga sus circuitos equivalentes en ***V*** y en ***T***.

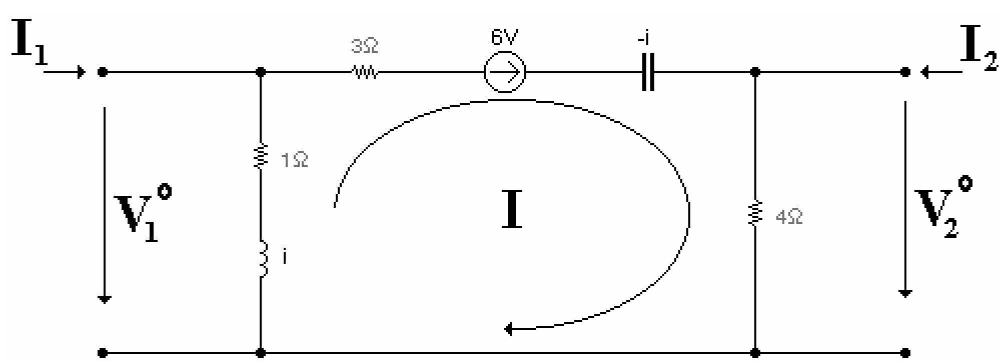


Solución:

Las ecuaciones que caracterizan a una red activa con parámetros de circuito abierto o parámetros *Z* son:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + V_1^0$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + V_2^0$$

Cálculo de V_1^0.-V_1^0 es la caída de voltaje que se tiene de la terminal 1 a su terminal de referencia, debida a la fuente interna, con las terminales del cuadripolo abiertas.



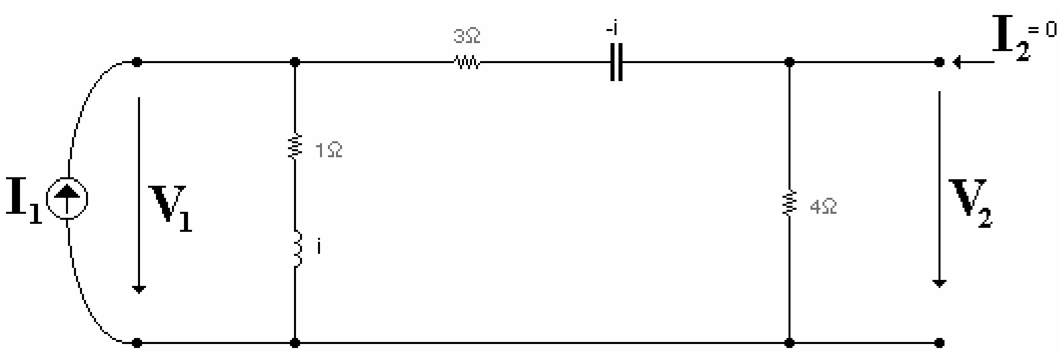
$$V_1^0 = -(1+i)I = -(1+i)\left(\frac{6}{3-i+4+i+1}\right) = -(1+i)\left(\frac{3}{4}\right) = -0.75 - 0.75i = 1.06\underline{|-135^{o}} \quad volts.$$

Cálculo de V_2^0. Esta caída es la que se tiene de la terminal 2 a su terminal de referencia, con las terminales del cuadripolo abiertas.

$$V_2^0 = 4I = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \quad volts.$$

Para el cálculo de los parámetros $\mathbf{Z}_{k,l}$ deberá pacificarse la red y excitar las terminales correspondientes de acuerdo con las condiciones impuestas.

Cálculo de Z_{11} y Z_{21}. El circuito correspondiente es:



$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(Z_{eq})I_1}{I_1} = \frac{(7-i)(1+i)}{7-i+i+1} = 1 + 0.75i$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

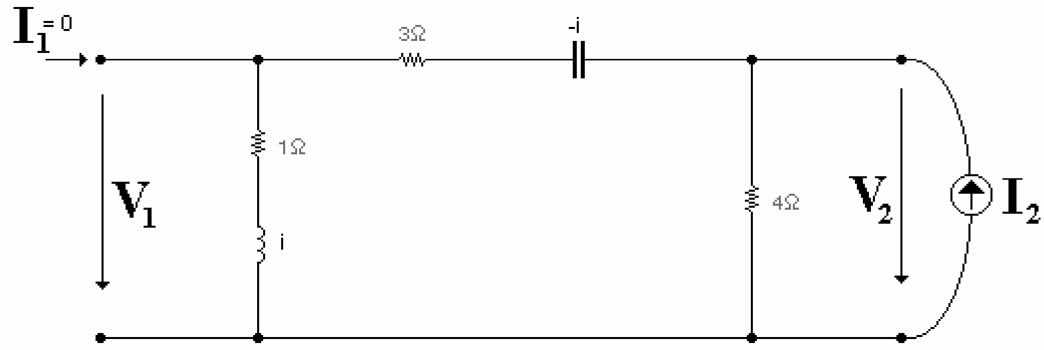
La corriente que circula por el resistor de 4Ω, por divisor de corriente es:

$$I_{4\Omega} = \frac{(1+i)\,I_1}{8}, \text{ por lo tanto}$$

$$V_2 = 4\left[\frac{(1+i)\,I_1}{8}\right]$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{4\left[\frac{(1+i)\,I_1}{8}\right]}{I_1} = \frac{1+i}{2} = 0.5 + 0.5i$$

Cálculo de Z_{12} y Z_{22}. El circuito correspondiente es:



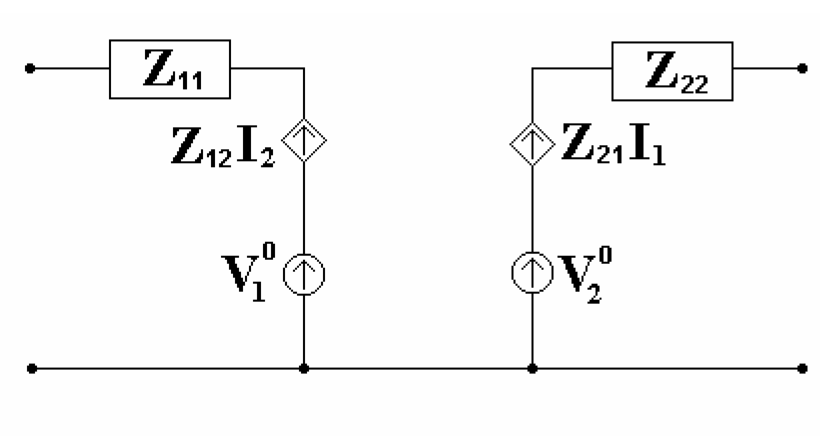
Puesto que se tiene un cuadripolo puramente pasivo (en su interior no existen fuentes de ningún tipo) se debe cumplir que $Z_{21} = Z_{12}$ (red recíproca).

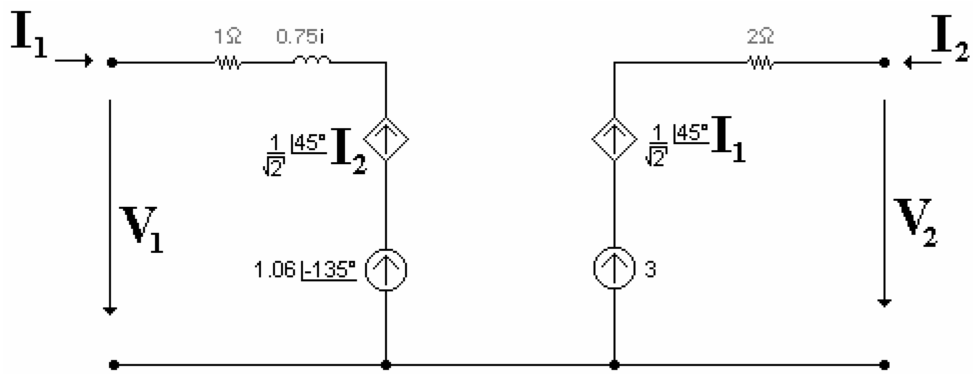
Comprobación

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(1+i)\left[\frac{4I_2}{8}\right]}{I_2} = \frac{4+4i}{8} = 0.5+0.5i \quad \Omega$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(Z'_{eq})I_2}{I_2} = \frac{4(3+1)}{8} = 2 \quad \Omega$$

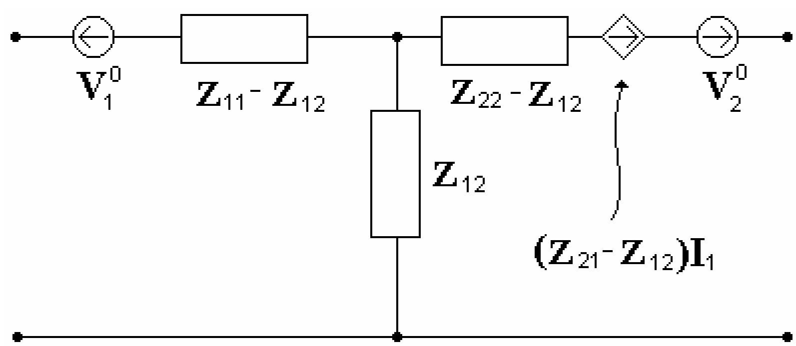
La representación de la red mediante su circuito equivalente en V es:





Cuadripolo activo

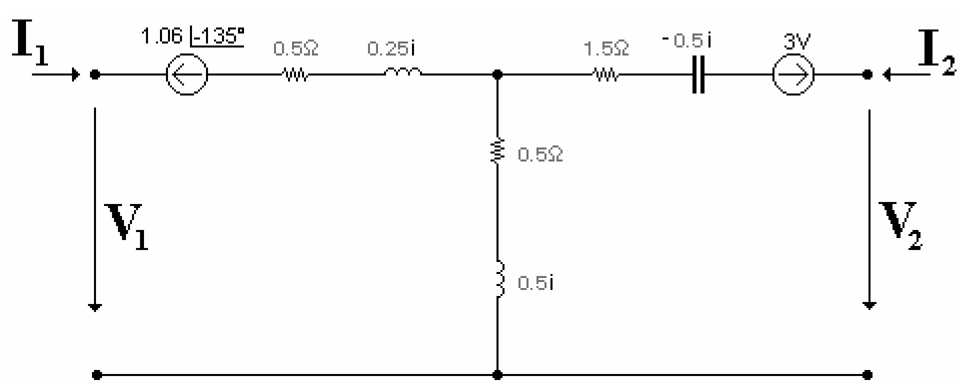
La representación de la red mediante su circuito equivalente en *T* es:



En donde:

$$Z_{11} - Z_{12} = 1 + 0.75i - 0.5 - 0.5i = 0.5 + 0.25i \quad \Omega$$

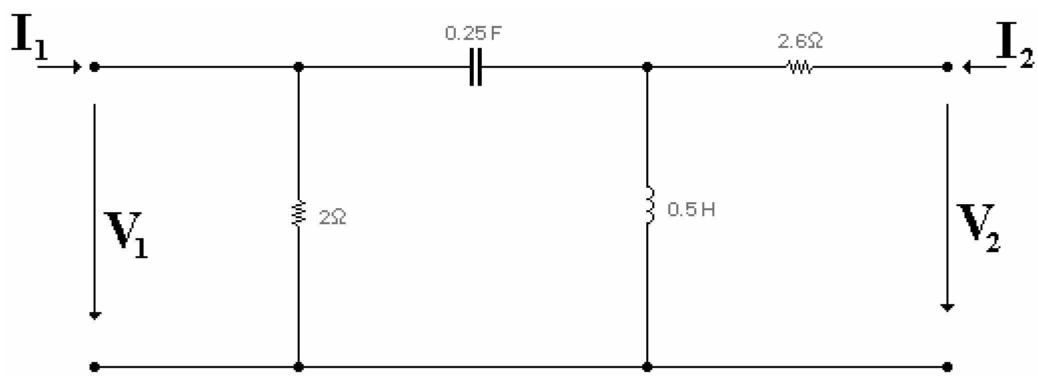
$$Z_{22} - Z_{12} = 2 - 0.5 - 0.5i = 1.5 - 0.5i \quad \Omega$$



Cuadripolo activo.

PROBLEMA 3

Calcule los parámetros ***Z*** de la siguiente red y obtenga la representación de su circuito equivalente en ***V***, a la frecuencia ω=2 *rad/seg.*

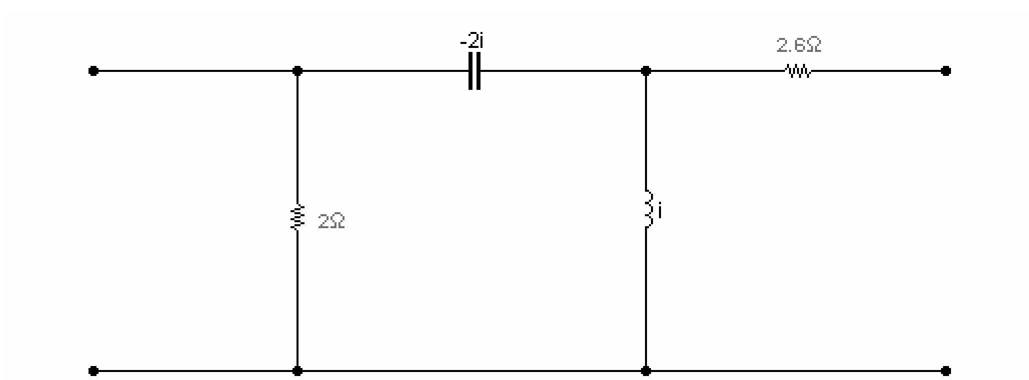


Solución:

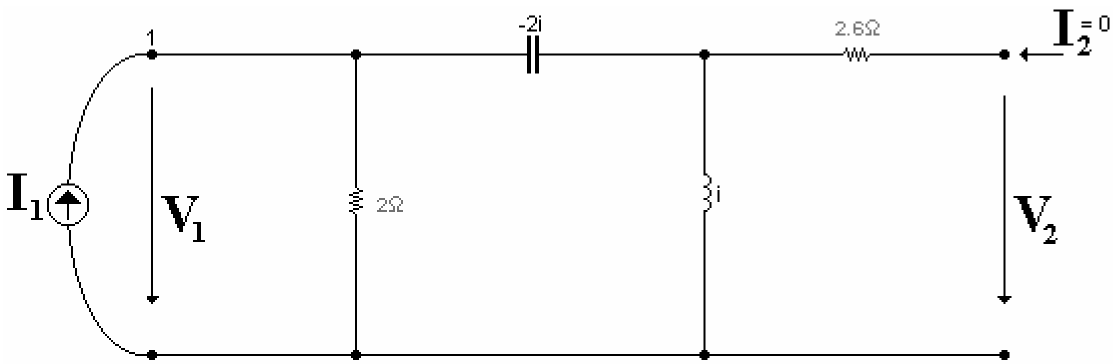
$$Z_C = \frac{s}{i\omega} = \frac{4}{2i} = -2i \quad \Omega$$

$$Z_L = i\omega L = i(2)\left(\frac{1}{2}\right) = i \quad \Omega$$

El circuito transformado es:



Cálculo de Z_{11} *y* Z_{21}. La red correspondiente es:

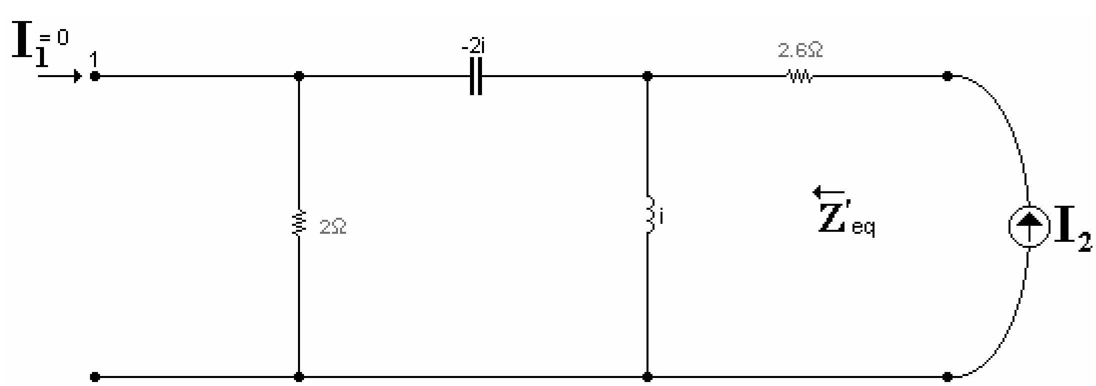


$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{I_1 Z_{eq}}{I_1} = \frac{2(-i)}{2-i} = \frac{-2i(2+i)}{5} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i = 0.4 - 0.8i \quad \Omega$$

Con el mismo circuito calculamos Z_{21}, aplicando divisor de corriente para obtener V_2.

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{i\left[\dfrac{2I_1}{2-i}\right]}{I_1} = \frac{2i}{2-i} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = -0.4 + 0.8i = 0.894\angle 116.5^{\circ} \quad \Omega$$

Cálculo de Z_{12} *y* Z_{22}. El circuito correspondiente es:



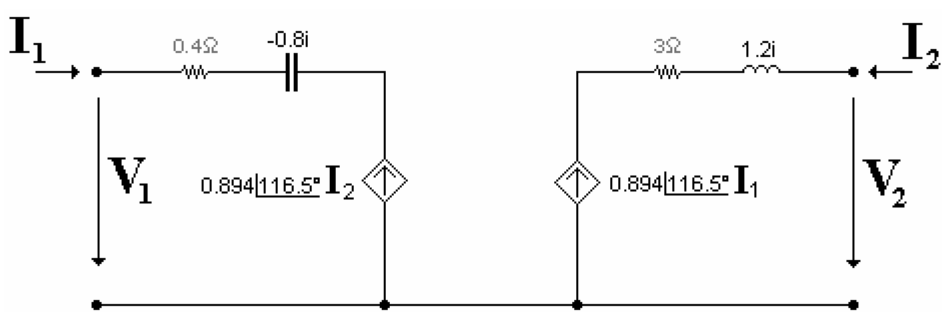
Al tener una red puramente pasiva $Z_{12} = Z_{21}$.

$$Z_{12} = -0.4 + 0.8i \quad \Omega$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(Z'_{eq})I_2}{I_2} = 2.6 + \frac{(2-2i)i}{2-2i+i} = 2.6 + \frac{2+6i}{5}$$

$$Z_{22} = 3 + 1.2i \quad \Omega$$

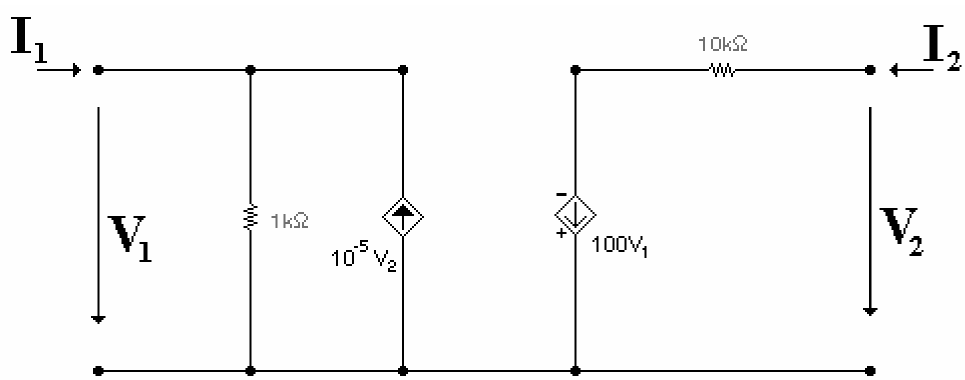
La representación de la red por su circuito equivalente en ***V*** es:



Cuadripolo pasivo (contiene fuentes aparentes).

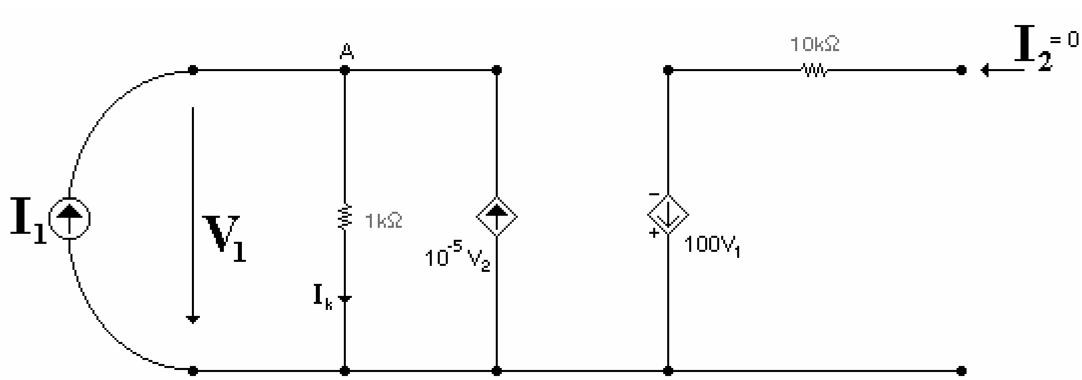
PROBLEMA 4

Calcule los parámetros ***Z*** de la red mostrada.



Solución:

Cálculo de Z_{11}. El circuito correspondiente es:



Aplicandola ley de Kirchhoff de corrientes (L. K. I.) al nodo *A* se cumple que:

$$-I_1 + I_k - I_{fc} = 0 \text{..............................(1)}$$

Además se observa que $V_2 = -100V_1$ ya que $I_2 = 0$.

Por lo tanto $I_{fc} = 10^{-5} V_2 = 10^{-5}(-100V_1)$.

Sustituyendo I_{fc} en (1).

$$-I_1 + I_k - 10^{-5}(-100V_1) = 0$$

$$\therefore \quad I_k = I_1 - 10^{-5}(100V_1) = I_1 - 10^{-3}V_1$$

Por ley de ohm se tiene que:

$$V_1 = 10^3 I_k = 10^3\left(I_1 - 10^{-3}V_1\right) = 10^3 I_1 - V_1$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{10^3 I_1 - V_1}{I_1} = 10^3 - \frac{V_1}{I_1} = 10^3 - Z_{11}$$

$$2Z_{11} = 10^3$$

$$Z_{11} = \frac{10^3}{2} = 500\Omega$$

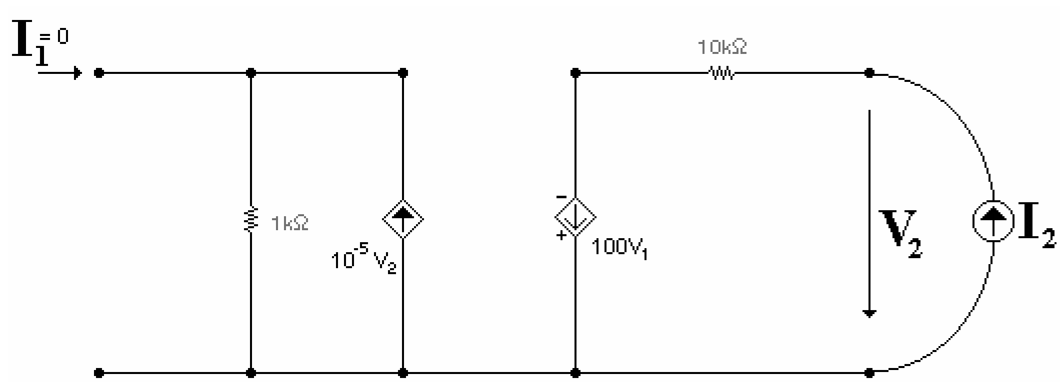
Cálculo de Z_{21}

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{-100V_1}{I_1} = \frac{-100\left[10^3 I_1 - V_1\right]}{I_1} = \frac{-10^5 I_1 + 100V_1}{I_1} = -10^5 + 100\frac{V_1}{I_1}$$

$$Z_{21} = -10^5 + 100Z_{11}$$

$$Z_{21} = -10^5 + 100(500) = -10^5 + 5x10^4 = -50000 \quad \Omega$$

Cálculo de Z_{12}. En la red que estamos analizando existen fuentes aparentes por lo que la red no es recíproca, es decir Z_{12} es diferente de Z_{21} y habrá que calcular Z_{12} mediante el siguiente circuito.



$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(10^{-5}V_2)(10^3)}{I_2} = 10^{-2}\frac{V_2}{I_2}$$

pero $V_2 = 10^4 I_2 - 100V_1$

$$Z_{12} = \frac{10^{-2}(10^4 I_2 - 100V_1)}{I_2} = 10^2 - \frac{V_1}{I_2}$$

$$Z_{12} = 10^2 - Z_{12}$$

$$2Z_{12} = 10^2$$

$$\therefore Z_{12} = 50\Omega$$

Cálculo de Z_{22}

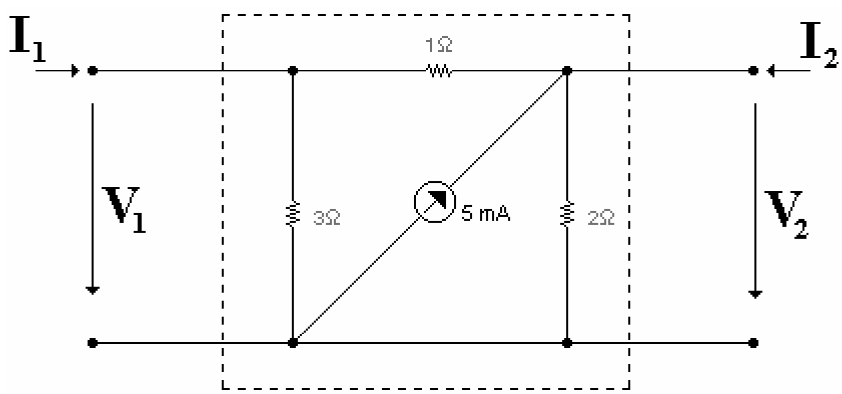
$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{10^4 I_2 - 100V_1}{I_2} = \frac{10^4 I_2 - 100(10^{-2}V_2)}{I_2} = 10^4 - \frac{V_2}{I_2} = 10^4 - Z_{22}$$

$$2Z_{22} = 10^4$$

$$Z_{22} = 5000\Omega$$

PROBLEMA 5

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de corto circuito.

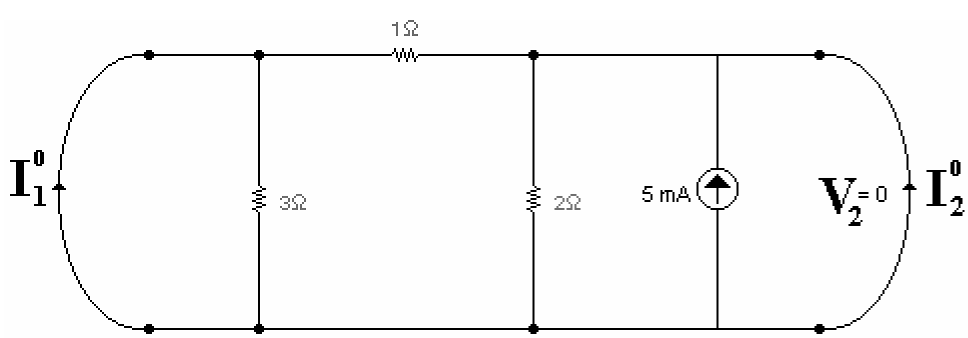


Solución:

Los parámetros de corto circuito son los parámetros ***Y***. Las ecuaciones con estos parámetros para una red activa son:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + I_1^0$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + I_2^0$$

Calculemos primeramente I_1^0 e I_2^0 que son las corrientes debidas a la fuente interna con las terminales del cuadripolo en corto circuito, como se muestra:



Obteniéndose:

$I_1^0 = 0 \quad amp.$

$I_2^0 = -5x10^{-3} \quad amp.$

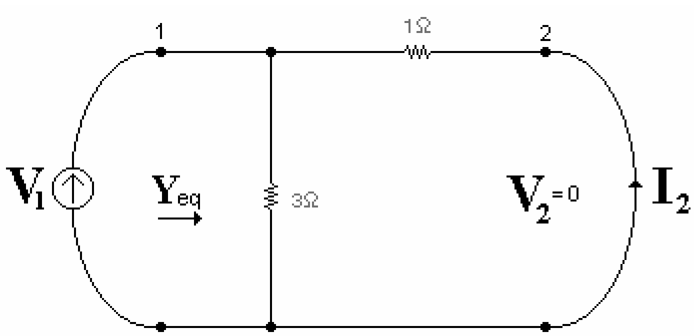
Para calcular los parámetros $\boldsymbol{Y_{k,l}}$ debemos pacificar la red (anular fuentes reales), a la vez que cortocircuitar las terminales del puerto correspondiente y excitar con una fuente real el otro puerto, según las condiciones requeridas.

Cálculo de Y_{11} y Y_{21}

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \rightarrow \text{ Admitancia de entrada } [mhos].$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \rightarrow \text{ Admitancia de transferencia directa } [mhos].$$

En ambos parámetros se tiene la condición de que V_2 = 0, por lo que el circuito resultante es:



$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{Y_{eq}(V_1)}{V_1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad mhos$$

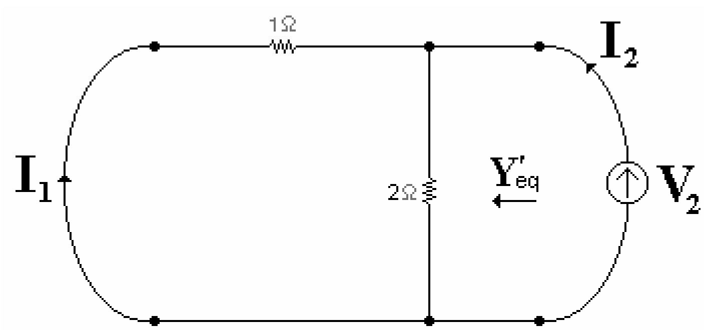
$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{(-1)V_1}{V_1} = -1 \quad mhos$$

Cálculo de Y_{12} *y* Y_{22}

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \rightarrow \text{ Admitancia de transferencia inversa } [mhos].$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \rightarrow \text{ Admitancia de salida } [mhos].$$

Con la condición de $V_1 = 0$, obtenemos:



$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{(-1)(V_2)}{V_2} = -1 \quad mhos$$

Cumpliéndose que en una red puramente pasiva (no contiene en su interior fuentes de ningún tipo) $Y_{12} = Y_{21}$.

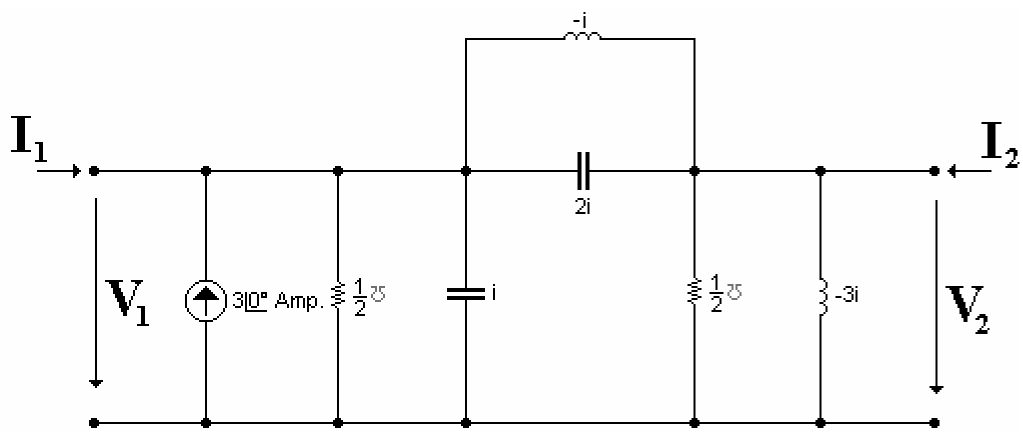
$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{Y'_{eq}V_2}{V_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad mhos$$

Con lo resultados obtenidos, las ecuaciones que caracterizan a la red son:

$$I_1 = \frac{4}{3}V_1 + (-1)V_2$$
$$I_2 = (-1)V_1 + 1.5V_2 - 5x10^{-3}$$

PROBLEMA 6

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de corto circuito y obtenga sus circuitos equivalentes en *V* y en π.



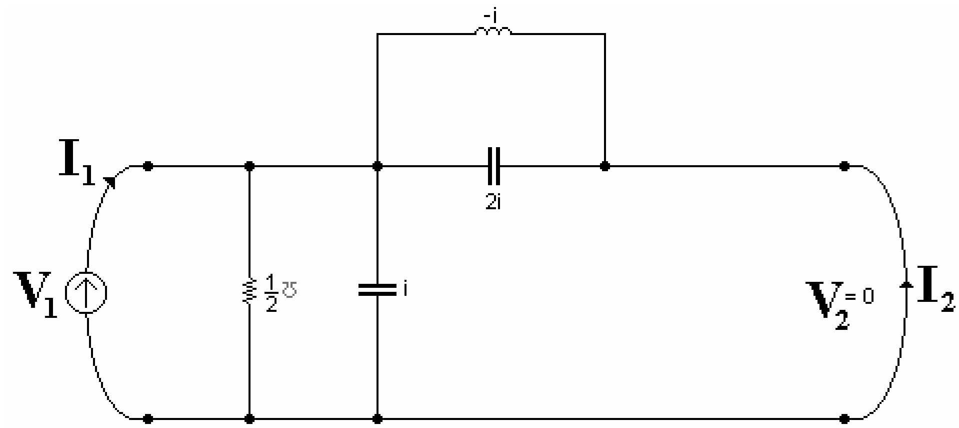
Solución:

Al cortocircuitar las terminales de los dos puertos de la red dada obtenemos:

$$I_1^0 = -3\underline{|0^\circ}\ \ amp.$$

$$I_2^0 = 0\ \ amp.$$

Cálculo de Y_{11} *y* Y_{21}. Al pacificar la red dada, cortocircuitar el puerto de salida y excitar el puerto de entrada obtenemos:

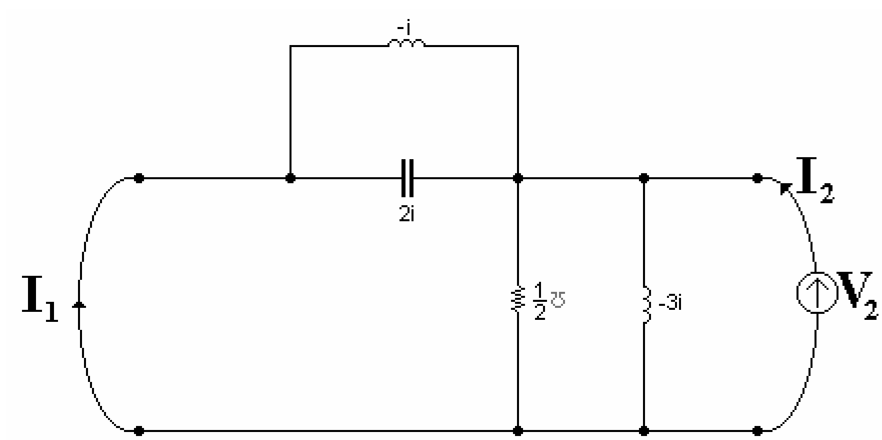


$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\left(\frac{1}{2}+i+2i-i\right)V_1}{V_1} = \frac{1}{2}+2i$$

$$Y_{11} = 0.5+2i \quad mhos$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-(-i+2i)V_1}{V_1} = -i \quad mhos$$

Cálculo de Y_{12} *y* Y_{22}. Para el cálculo de estos parámetros cortocircuitamos el puerto de entrada y excitamos con una fuente de voltaje el puerto de salida. La red resultante es:

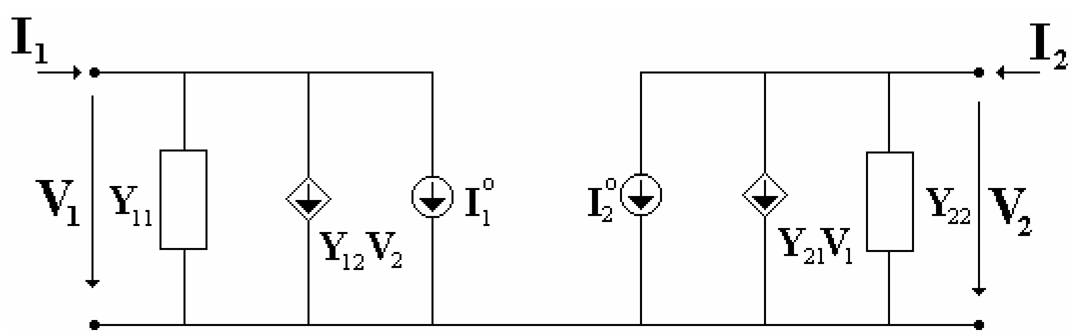


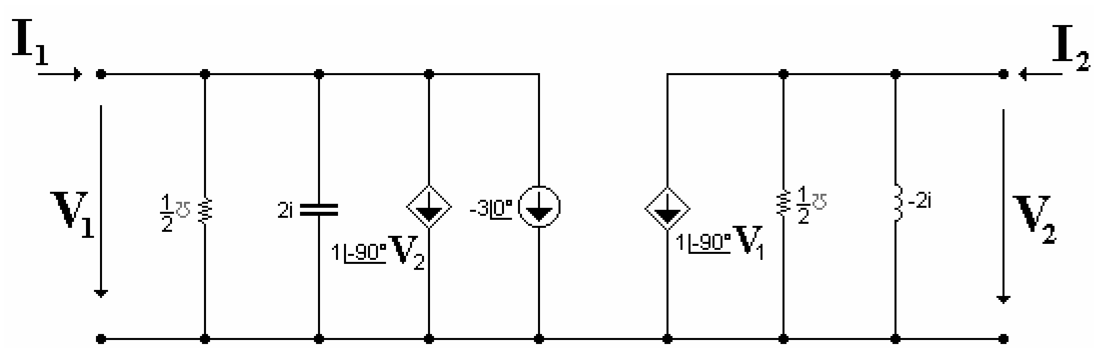
$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} = \frac{-(-i+2i)V_2}{V_2} = -i$$

En una red recíproca este parámetro no es necesario calcularlo, ya que es igual a Y_{21}.

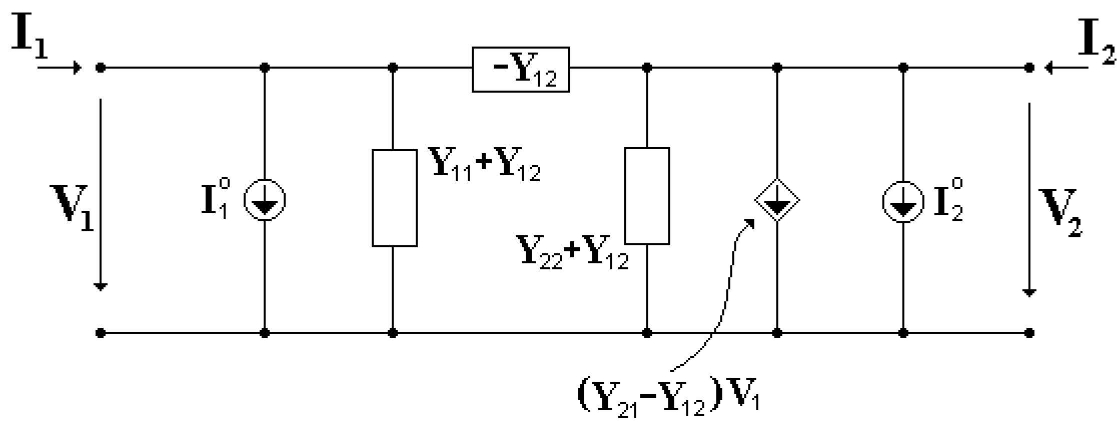
$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} = -3i + \frac{1}{2} + 2i - i = \frac{1}{2} - 2i \quad mhos$$

Representación de la red en *V*



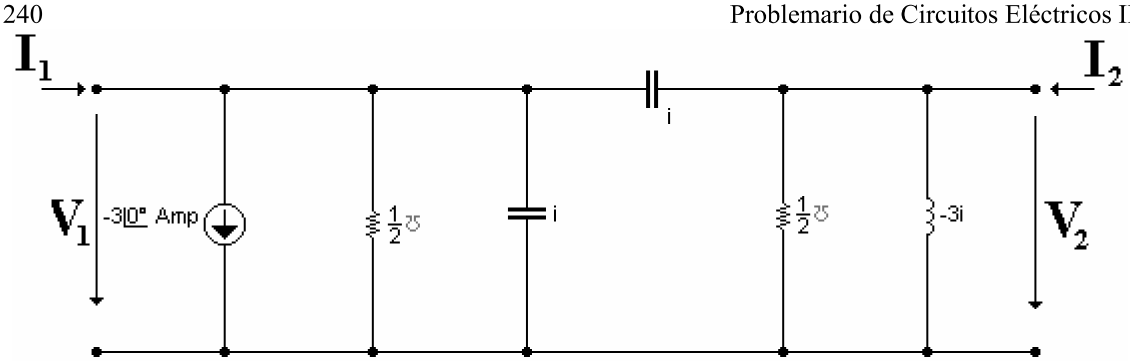


Representación en π



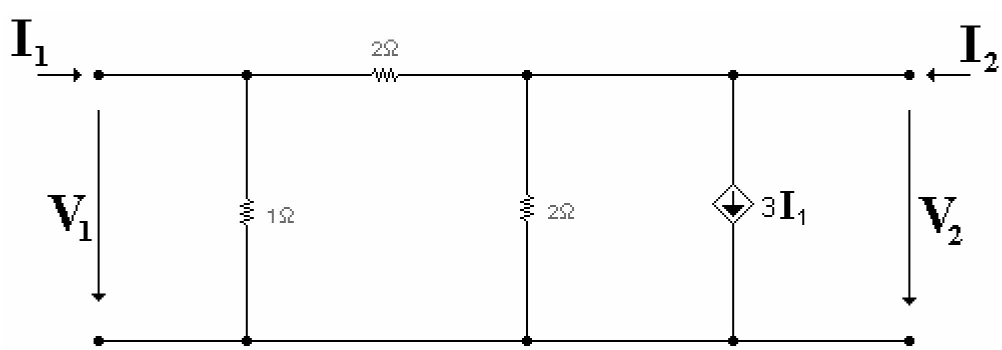
$$Y_{11} + Y_{12} = \frac{1}{2} + 2i - i = \frac{1}{2} + i$$

$$Y_{22} + Y_{12} = \frac{1}{2} - 2i - i = \frac{1}{2} - 3i$$



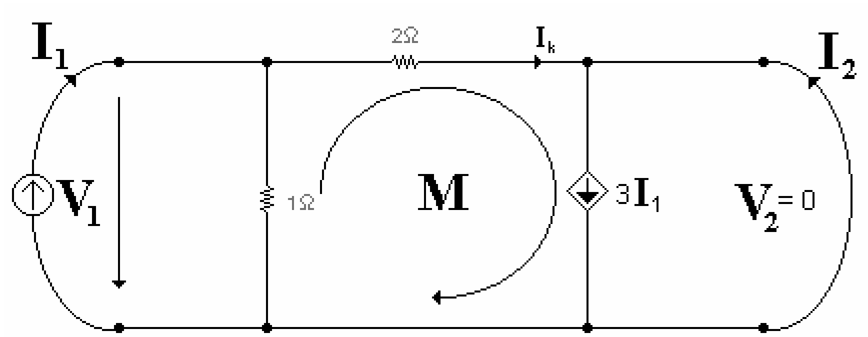
PROBLEMA 7

En la red mostrada, que contiene una fuente de corriente controlada por corriente, calcule los parámetros de corto circuito.



Solución:

Cálculo de Y_{11} *y* Y_{21}. Con la condición $V_2 = 0$ el circuito resultante es:



$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)V_1}{V_1} = \frac{3}{2} \quad mhos$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

Las siguientes consideraciones permitirán calcular I_2.

Al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes (L. K. I.) al nodo A:

$$-I_2 + 3I_1 - I_k = 0 \text{..............................(1)}$$

Para calcular I_k aplicamos la ley de Kirchhoff para voltajes (L. K. V.) a la malla *M*:

$$-V_1 + 2I_k + V_2 = 0 \qquad (V_2 = 0)$$

$$\therefore I_k = \frac{V_1}{2}$$

Sustituyendo I_k en (1):

$$-I_2 + 3I_1 - \frac{V_1}{2} = 0$$

$$I_2 = 3I_1 - \frac{V_1}{2}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{3I_1 - \frac{V_1}{2}}{V_1} = 3\frac{I_1}{V_1} - \frac{1}{2}$$

Con la misma condición ($V_2 = 0$) sabemos que:

$$\frac{I_1}{V_1} = Y_{11} = \frac{3}{2} \quad mhos, \quad \text{así} \quad \text{que}:$$

$$Y_{21} = 3\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$$

$$Y_{21} = 4 \quad mhos$$

También se pudo haber obtenido I_k por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{(1)\,I_1}{1+2} = \frac{I_1}{3}$$

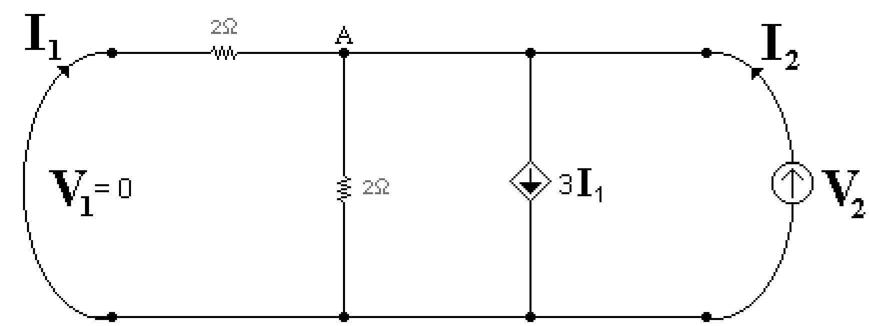
Sustituyendo en (1):

$$-I_2 + 3\,I_1 - \frac{I_1}{3} = 0$$

$$I_2 = 3\,I_1 - \frac{I_1}{3} = I_1\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{I_1\left(\frac{8}{3}\right)}{V_1} = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \quad mhos$$

Cálculo de Y_{12} *y* Y_{22}. En la red dada se tiene una fuente aparente, por lo que la red no es recíproca y habrá que calcular Y_{12}. Al aplicar la condición V_1=0 el circuito resultante es:



$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)V_2}{V_2} = -\frac{1}{2} \quad mhos$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

Las siguientes consideraciones permitirán calcular I_2.

$$I_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)V_2$$

Aplicando la ley de Kirchhoff para corrientes (L. K. I.) al nodo *A* de la figura, resulta:

$$-I_1 + \frac{V_2}{2} + 3I_1 - I_2 = 0 \text{........................(1)}$$

Sustituyendo I_1 en (1):

$$\frac{1}{2}V_2 + \frac{V_2}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}V_2\right) - I_2 = 0$$

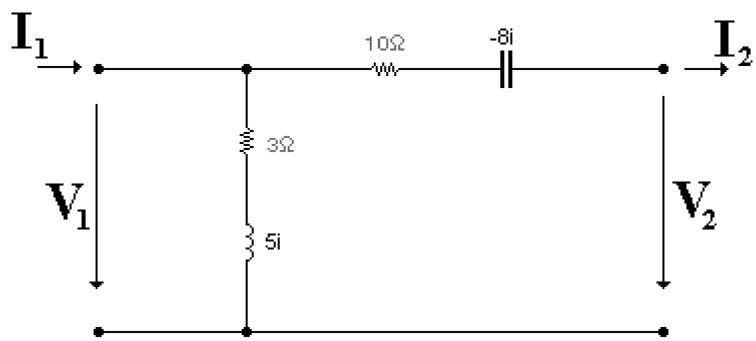
$$\therefore I_2 = V_2 - \frac{3}{2}V_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}V_2$$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-\frac{1}{2}V_2}{V_2} = -\frac{1}{2} \quad mhos$$

PROBLEMA 8

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de transmisión directos:



Solución:

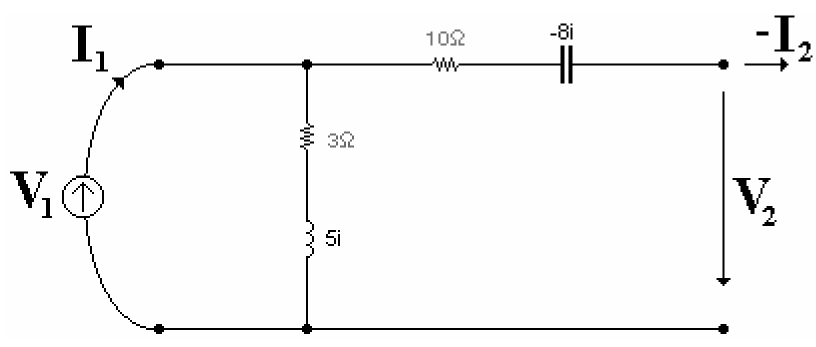
Las ecuaciones que caracterizan a la red dada, con parámetros de transmisión directos *A*, *B*, *C* y *D* son:

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$
$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

$A = \left.\dfrac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} \rightarrow$ Relación de voltaje de entrada a voltaje de salida, con salida abierta [sin unidades]

$C = \left.\dfrac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} \rightarrow$ Admitancia de transferencia inversa, con salida abierta [*mhos*]

Cálculo de A y C. La siguiente configuración permite calcular *A* y *C*.



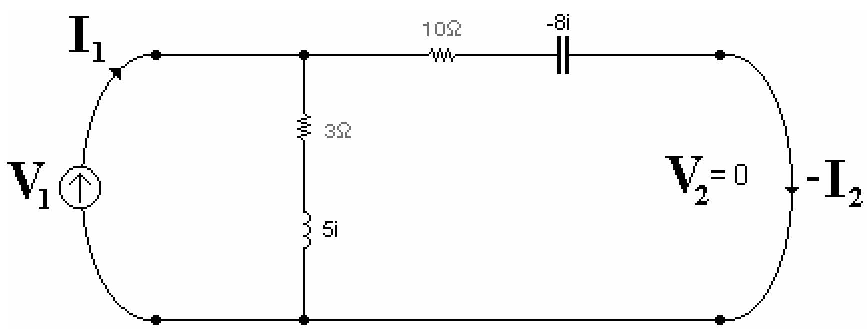
Con $-I_2 = 0$ no circula corriente por la terminal 2, por lo que $V_1 = V_2$.

$$V_1 = (3+5i)\,I_1 = V_2$$

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = 1$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = \frac{I_1}{(3+5i)\,I_1} = \frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{34} \quad mhos$$

Cálculo de B y D. La siguiente configuración permite calcular *B* y *D*.



$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$ → Impedancia de transferencia inversa, con salida en corto circuito [Ω].

$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$ → Relación de corriente de entrada a corriente de salida, con salida en corto circuito [sin unidades].

Por divisor de corriente:

$$-I_2 = \frac{3+5i}{13-3i}\,I_1$$

$$V_1 = \frac{(10-8i)(3+5i)}{13-3i}\,I_1$$

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{\dfrac{(10-8i)(3+5i)}{13-3i}\,I_1}{\dfrac{3+5i}{13-3i}\,I_1} = 10-8i \quad \Omega$$

$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{I_1}{\dfrac{3+5i}{13-3i}\,I_1} = \frac{13-3i}{3+5i} = \frac{24-74i}{34}$$

Como la red es puramente pasiva (en su interior no contiene fuentes de ningún tipo) se debe cumplir que $AD - BC = 1$, pudiéndose obtener también el parámetro D de la ecuación anterior.

$$D = \frac{1 + BC}{A} = 1 + BC$$

$$D = 1 + (10 - 8i)\left(\frac{1}{3 + 5i}\right) = \frac{13 - 3i}{3 + 5i}$$

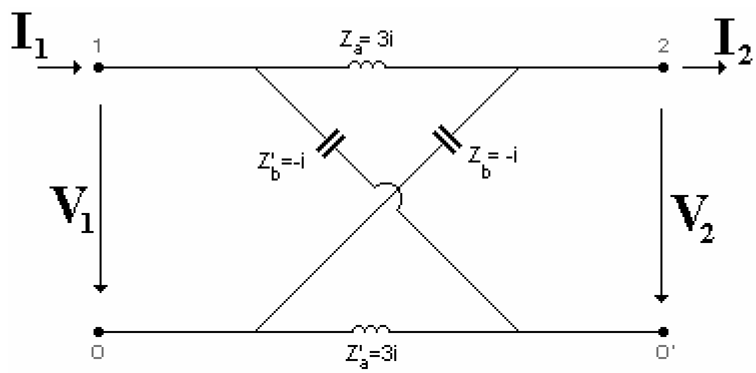
Finalmente, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 - 8i \\ \frac{3 - 5i}{34} & \frac{24 - 74i}{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

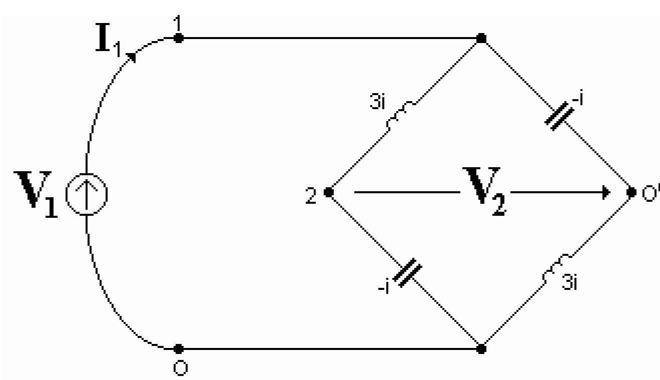
PROBLEMA 9

En la red de celosía simétrica dada, calcule los parámetros de transmisión directos.



Solución:

Para una más clara visualización de esta red, ubiquemos sus nodos nuevamente, conectando los elementos que existen entre dichos nodos y obtener la siguiente configuración:



Se observa que las ramas tienen impedancias iguales.

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}$$

$$V_1 = \frac{(3i-i)(3i-i)}{4i} I_1 = -\frac{4}{4i} I_1 = i\, I_1$$

La corriente que circula por cada rama es $\frac{1}{2} I_1$ por ser impedancias iguales, pudiéndose aplicar la ley de Kirchhoff para voltajes en el triángulo superior de la figura:

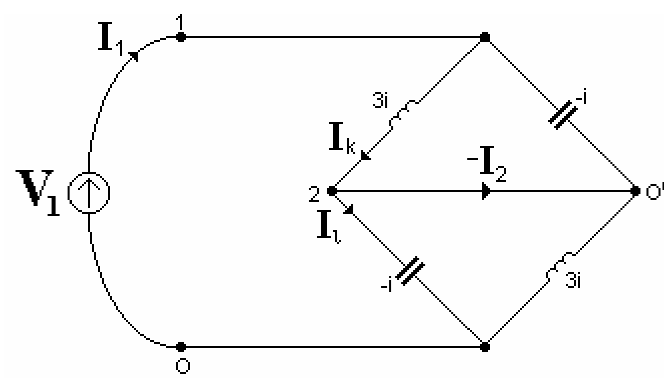
$$3i\frac{1}{2}I_1+V_2-(-i)\frac{1}{2}I_1=0$$

$$\therefore V_2=-\frac{3i}{2}I_1-\frac{1}{2}iI_1=-2iI_1$$

$$A=\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}=\frac{iI_1}{-2iI_1}=-\frac{1}{2}$$

$$C=\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}=\frac{I_1}{-2iI_1}=-\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}i \quad mhos.$$

Cálculo de B y D. La siguiente configuración permite calcular *B* y *D* (se cortocircuitan las terminales 2 y *O'*).



Al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes al nodo 2:

$$-I_k+I_l-I_2=0$$
$$-I_2=I_k-I_l \text{...............................(1)}$$

En la figura se observa que las impedancias del triángulo superior están en paralelo y son del mismo valor que las del triángulo inferior, por lo que:

$$I_k=\frac{\frac{V_1}{2}}{3i}$$

e

$$I_l=\frac{\frac{V_1}{2}}{-i}$$

Sustituyendo I_k e I_1 en (1):

$$-I_2 = \frac{V_1}{6i} - \frac{V_1}{-2i} = -\frac{1}{6}iV_1 - \frac{1}{2}iV_1 = -\frac{2}{3}iV_1$$

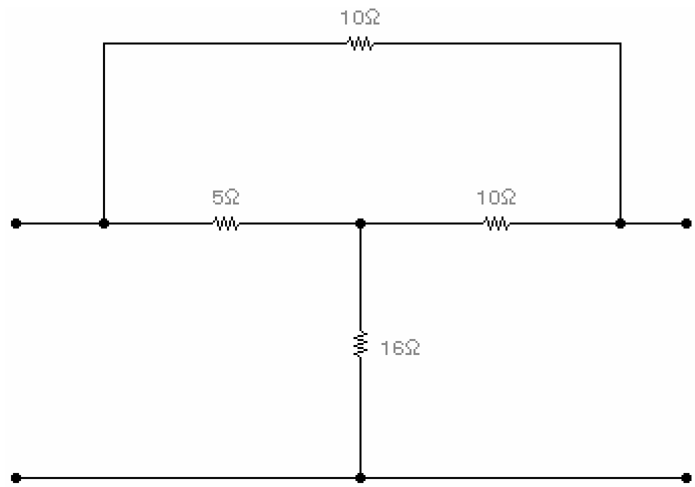
$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{V_1}{-\frac{2}{3}iV_1} = \frac{3}{2}i$$

$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{\frac{V_1}{Z_T}}{-I_2} = \frac{\frac{V_1}{-3i}}{-\frac{2}{3}iV_1} = \frac{3V_1}{-6V_1} = -\frac{1}{2}$$

Se cumple que $AD - BC = 1$ por ser la red recíproca y también que $A = D$ por ser simétrica.

PROBLEMA 10

En la red dada calcule los parámetros de transmisión inversos.



Solución:

Las ecuaciones que caracterizan a la red dada, con parámetros de transmisión inversos *A'*, *B'*, *C'* y *D'* son:

$$V_2 = A'V_1 + B'(-I_1)$$
$$I_2 = C'V_1 + D'(-I_1)$$

donde

$$A' = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{-I_1=0}$$ → Ganancia en voltaje, con entrada abierta [sin unidades].

$$C' = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{-I_1=0}$$ → Admitancia de transferencia directa, con entrada abierta [*mhos*].

Cálculo de A' y C'. Con la condición $-I_1$=0 se obtiene el siguiente circuito:

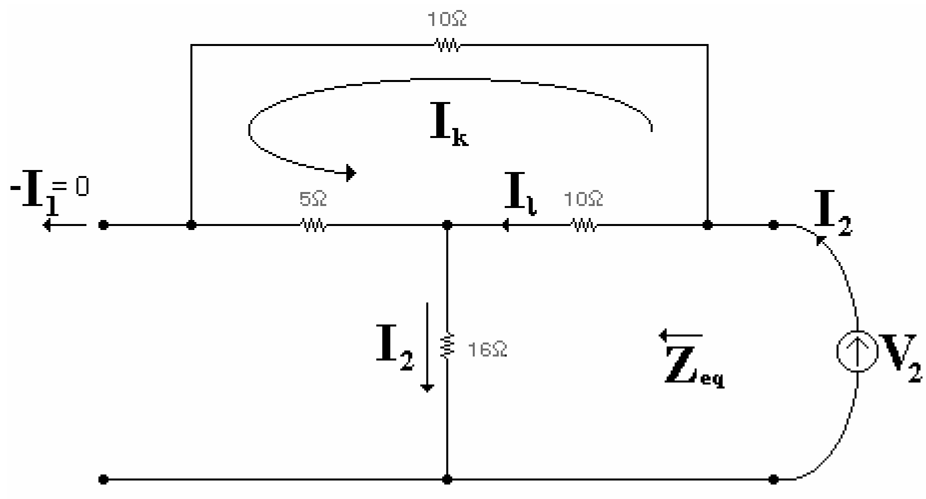


Figura 1

Se observa que el resistor de 5Ω está en serie con el de 10Ω de la rama superior, quedando en paralelo un resistor de 15Ω con otro de 10Ω.

$$V_2 = Z_{eq} I_2$$
$$V_2 = \left(\frac{15x10}{15+10} + 16\right) I_2$$
$$V_1 = 5 I_k + 16 I_2$$

Para calcular I_k observamos que el resistor de 15Ω (resultante de la suma en serie de 5Ω y de 10Ω) está en paralelo con el otro resistor de 10Ω y la corriente de entrada es I_2.

Por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{10}{25} I_2$$
$$A' = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{-I_1=0} = \frac{(6+16)\, I_2}{5\left(\frac{10}{25} I_2\right) + 16 I_2} = \frac{22 I_2}{2 I_2 + 16 I_2} = \frac{22}{18}$$
$$C' = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{-I_1=0} = \frac{I_2}{5 I_k + 16 I_2} = \frac{I_2}{(2+16)\, I_2} = \frac{1}{18} \quad mhos$$

Cálculo de B' y D'.-

$$B' = \left.\frac{V_2}{-I_1}\right|_{V_1=0} \rightarrow$$ Impedancia de transferencia directa, con entrada en corto circuito [Ω].

$$D' = \left.\frac{I_2}{-I_1}\right|_{V_1=0} \rightarrow$$ Ganancia en corriente, con entrada en corto circuito [sin unidades].

La red correspondiente es:

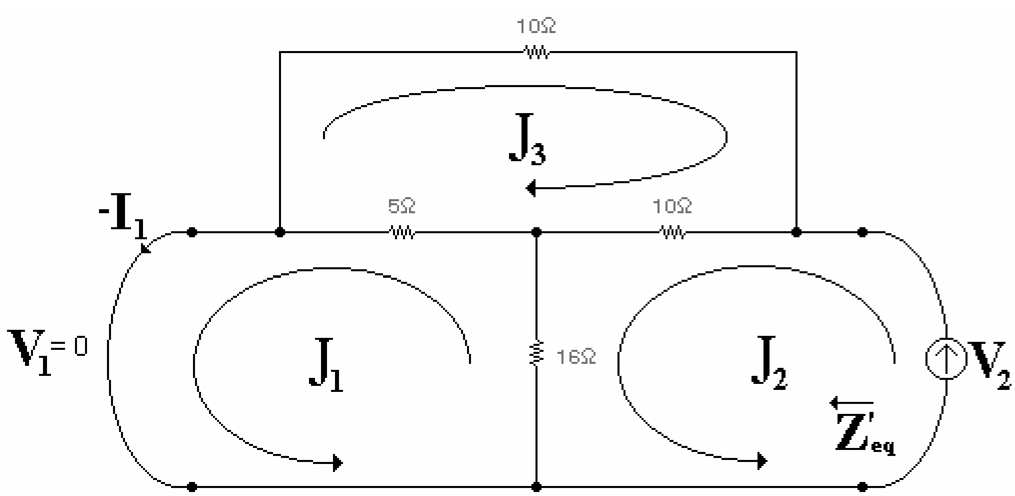


Figura 2

$$-I_1 = J_1.$$

Calculando J_1 por el método de mallas:

$$Z_{11} = 21$$

$$Z_{22} = 26$$

$$Z_{33} = 25$$

$$Z_{12} = -16$$

$$Z_{13} = 5$$

$$Z_{23} = 10$$

$$J_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -16 & 5 \\ V_2 & 26 & 10 \\ 0 & 10 & 25 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 21 & -16 & 5 \\ -16 & 26 & 10 \\ 5 & 10 & 25 \end{bmatrix}} = \frac{450V_2}{2900}$$

$$B' = \left.\frac{V_2}{-I_1}\right|_{V_1=0} = \frac{V_2}{\frac{45V_2}{290}} = \frac{290}{45}$$

$$D' = \left.\frac{I_2}{-I_1}\right|_{V_1=0} = \frac{I_2}{\frac{45}{290}V_2}$$

$$V_2 = Z'_{eq} I_2$$

En la figura 2 se observa que el resistor de 16Ω está en paralelo con el de 5Ω, por lo que al reducir la red se obtiene una $Z'_{eq} = \frac{29}{5}$

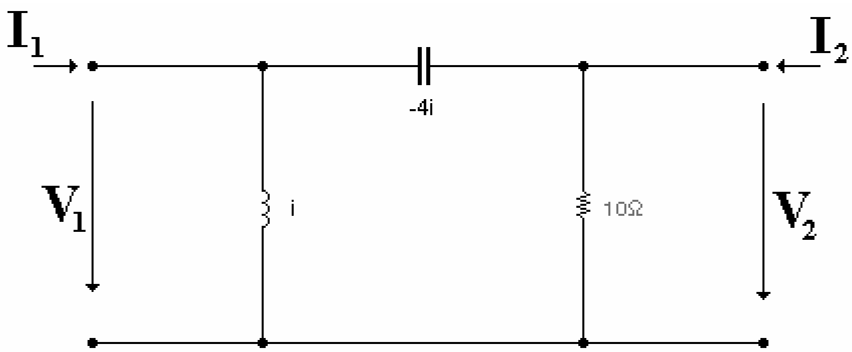
Así, $V_2 = \frac{29}{5} I_2$

$$D' = \left.\frac{I_2}{-I_1}\right|_{V_1=0} = \frac{I_2}{\frac{45}{290}V_2} = \frac{I_2}{\frac{45}{290}\left(\frac{29}{5}\right)I_2} = \frac{10}{9}$$

Se cumple que A’D’ – B’C’ = 1.

PROBLEMA 11

Calcule los parámetros híbridos directos de la red mostrada y obtenga su circuito equivalente.



Solución:

Los parámetros híbridos directos son los parámetros ***h***. Las ecuaciones con estos parámetros para la red dada son:

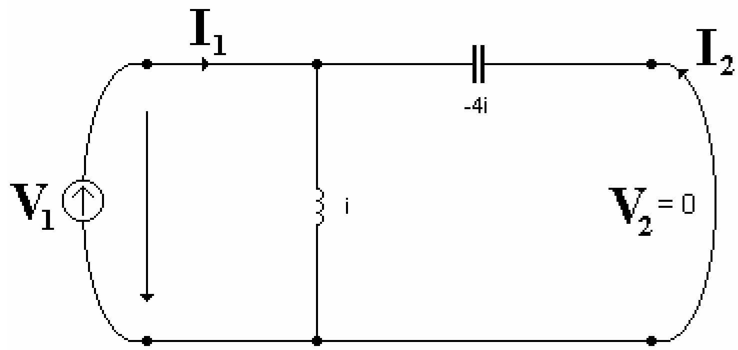
$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$
$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

Cálculo de h_{11} *y* h_{21}

$h_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}$ → Impedancia de entrada, con salida en corto circuito [Ω].

$h_{21} = \left.\dfrac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$ → Ganancia en corriente o factor de amplificación (α_{21}), con salida en corto circuito [sin unidades].

Con la condición $V_2 = 0$ la red correspondiente es:



$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{V_1}{YV_1}$$

$$Y = \frac{1}{i} - \frac{1}{4i} = -\frac{3}{4}i$$

$$h_{11} = \frac{V_1}{-\frac{3}{4}iV_1} = -\frac{4}{3i} = \frac{4i}{3} \quad \Omega$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$$

Por divisor de corriente calculamos I_2:

$$I_2 = -\frac{iI_1}{-4i+i} = \frac{1}{3}I_1$$

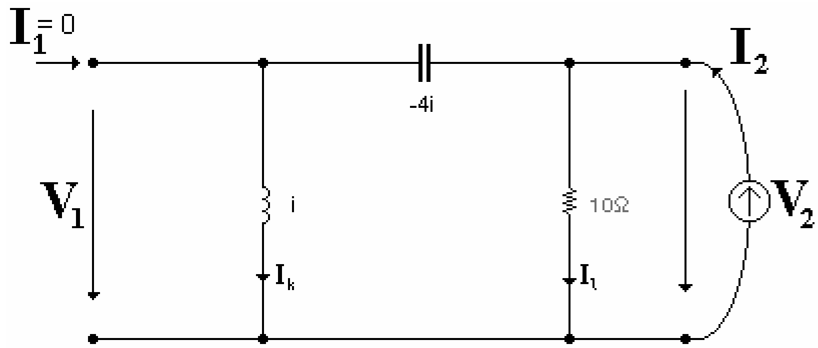
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{3}I_1}{I_1} = \frac{1}{3}$$

Cálculo de h_{12} *y* h_{22}

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} \rightarrow$$ Relación inversa de la ganancia en voltaje, con entrada abierta [sin unidades].

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \quad \rightarrow$$ Admitancia de salida, con entrada abierta [*mhos*].

Con la condición $I_1 = 0$ se tiene el siguiente circuito:



$$V_1 = i\,I_k = i\left(\frac{10\,I_2}{i-4i+10}\right) = \frac{10i\,I_2}{-3i+10}$$

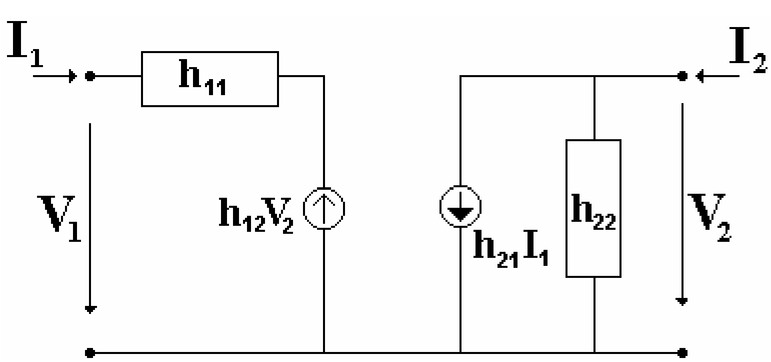
$$V_2 = 10\,I_l = 10\left(\frac{-3i\,I_2}{i-4i+10}\right) = \frac{-30i\,I_2}{-3i+10}$$

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\frac{10i\,I_2}{-3i+10}}{\frac{-30i\,I_2}{-3i+10}} = \frac{10i\,I_2}{-30i\,I_2} = -\frac{1}{3}$$

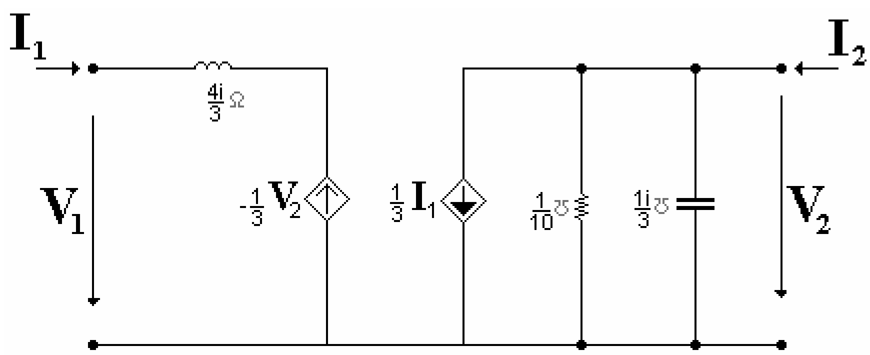
$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{I_2}{\frac{-30i\,I_2}{-3i+10}} = \frac{-3i+10}{-30i} = \frac{90+300i}{900}$$

$$h_{22} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3}i \quad mhos.$$

Se observa que por tener una red puramente pasiva (recíproca) $h_{12} = -\,h_{21}$. El circuito equivalente viene a ser:

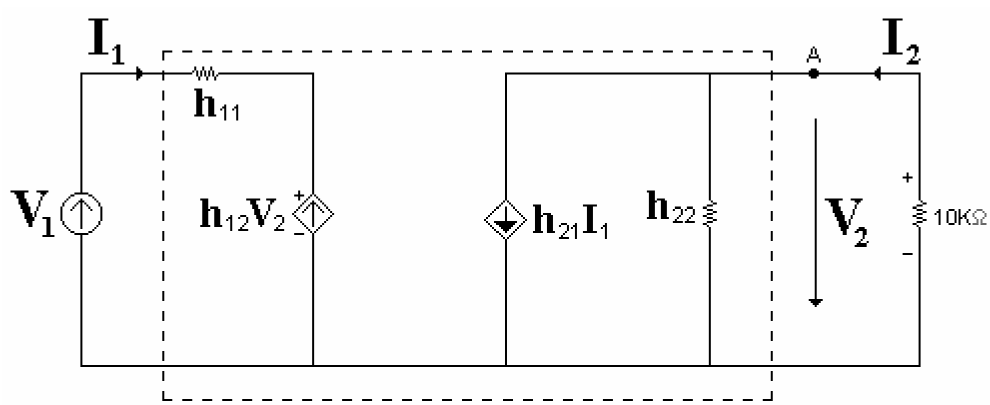


Al sustituir valores de parámetros, obtenemos:



PROBLEMA 12

En el circuito equivalente de un transistor con parámetros híbridos directos que se muestra, determine la ganancia en corriente $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$, la ganancia en voltaje $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ y la impedancia de entrada (Z_{ent}).



Transistor.

Valores típicos son:

$h_{11} = 1 \quad k\Omega$

$h_{12} = 3x10^{-4}$

$h_{21} = 50$

$h_{22} = 25\mu mhos$

Solución:

Cálculo de la ganancia en corriente. Al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes al nodo *A*:

$h_{21}I_1 + h_{22}V_2 - I_2 = 0$

$\therefore I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$.......................(1)

pero $V_2 = -10x10^3 I_2$

Sustituyendo valores en (1):

$$I_2 = 50 I_1 + 25x10^{-6}\left(-10x10^3 I_2\right) = 50 I_1 - 25x10^{-2} I_2$$

$$I_2(1 + 25x10^{-2}) = 50 I_1$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{50}{1 + 25x10^{-2}} = \frac{50}{1.25} = 40$$

Obsérvese que I_2 pudo obtenerse también directamente del circuito de salida por divisor de corriente:

$$I_2 = \frac{\left(\frac{1}{h_{22}}\right) h_{21} I_1}{\frac{1}{h_{22}} + Z_L} = \frac{h_{21} I_1}{1 + h_{22} Z_L}$$

y la ganancia en corriente queda como:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} Z_L} = 40$$

Cálculo de la ganancia en voltaje. Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla de entrada:

$$10^3 I_1 + h_{12} V_2 - V_1 = 0$$

$$\therefore I_1 = \frac{V_1 - h_{12} V_2}{10^3}$$

Sustituyendo I_1 en (1):

$$I_2 = h_{21}\left(\frac{V_1 - h_{12} V_2}{10^3}\right) + h_{22} V_2 \text{................}(2)$$

pero ya hemos establecido que

$$V_2 = -10x10^3 I_2$$

$$\therefore I_2 = -\frac{V_2}{10^4}$$

Sustituyendo I_2 en (2):

$$-\frac{V_2}{10^4} = h_{21}\left(\frac{V_1 - h_{12}V_2}{10^3}\right) + h_{22}V_2$$

Al sustituir los valores de los parámetros ***h***:

$$-\frac{V_2}{10^4} = 50\left(\frac{V_1 - 3x10^{-4}V_2}{10^3}\right) + 25x10^{-6}V_2$$

$$-V_2 = 5x10^2 V_1 - 15x10^{-2} V_2 + 25x10^{-2} V_2$$

$$-V_2 = 5x10^2 V_1 + 10^{-1} V_2$$

$$V_2\left(-1 - 10^{-1}\right) = 5x10^2 V_1$$

$$V_2(-1.1) = 5x10^2 V_1$$

$$\therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{5x10^2}{-1.1} = -454.54$$

Cálculo de la impedancia de entrada. Hemos obtenido al calcular la ganancia en voltaje que

$$I_1 = \frac{V_1 - h_{12}V_2}{10^3}$$

y también que $\frac{V_2}{V_1} = \frac{5x10^2}{-1.1}$

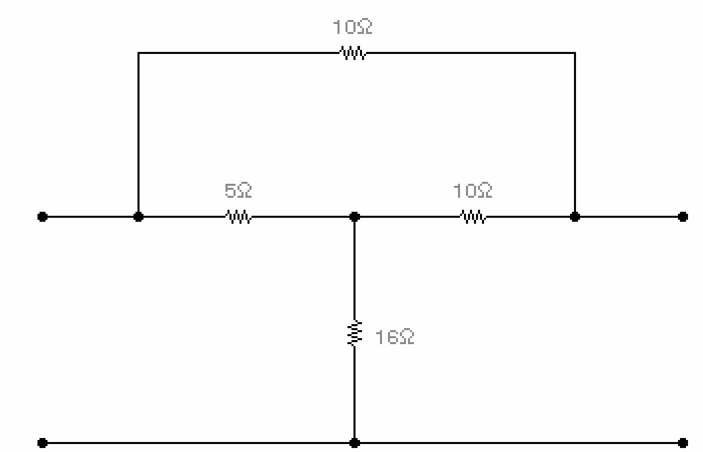
$\therefore V_2 = \frac{5x10^2 V_1}{-1.1}$, así que sustituyendo este valor de V_2 en I_1:

$$I_1 = \frac{V_1 - h_{12}\left(\frac{5x10^2}{-1.1}V_1\right)}{10^3} = \frac{V_1\left(1 - h_{12}\frac{5x10^2}{-1.1}\right)}{10^3}$$

$$Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{10^3}{1 + \frac{(3x10^{-4})(5x10^2)}{1.1}} = 880 \quad \Omega$$

PROBLEMA 13

Calcule los parámetros híbridos inversos de la red dada y obtenga su circuito equivalente.



Solución:

Las ecuaciones que caracterizan a una red puramente pasiva con parámetros híbridos inversos o parámetros "*g*" son:

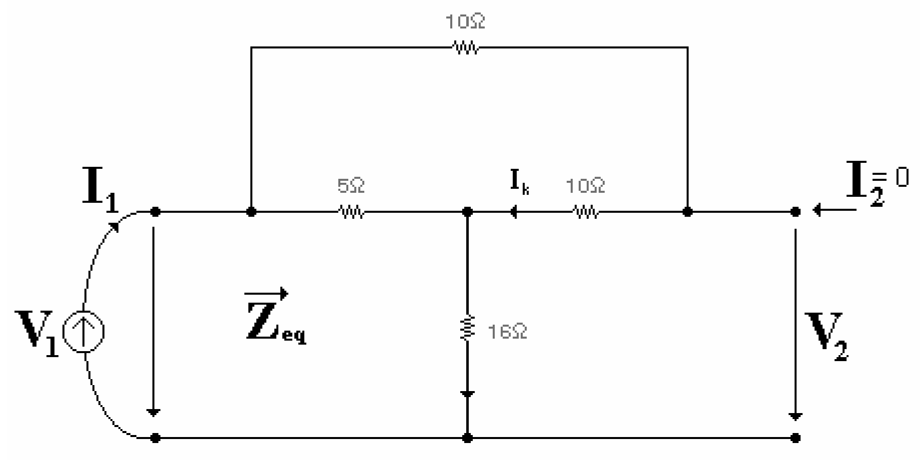
$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$
$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

Cálculo de g_{11} y g_{21}

$g_{11} = \left.\dfrac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0}$ → Admitancia de entrada, con salida abierta [*mhos*].

$g_{21} = \left.\dfrac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}$ → Ganancia en voltaje, con salida abierta [sin unidades].

La siguiente configuración corresponde a la condición $I_2 = 0$.



$$Z_{eq} = 20\|5 + 16 = \frac{20x5}{25} + 16 = 20$$

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{20\,I_1} = \frac{1}{20} \quad mhos$$

$$V_2 = 10\,I_k + 16\,I_1$$

Por divisor de corriente:

$$I_k = \frac{5\,I_1}{5+20} = \frac{5}{25}I_1$$

$$V_2 = 10\left(\frac{5}{25}I_1\right) + 16\,I_1 = 18\,I_1$$

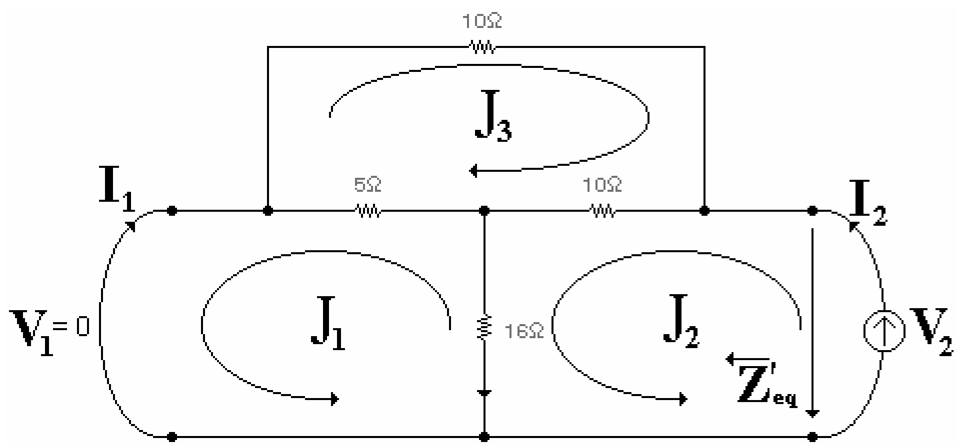
$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} = \frac{18\,I_1}{20\,I_1} = \frac{9}{10}$$

Cálculo de g_{12} y g_{22}

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}$$ → Ganancia en corriente, con entrada en corto [sin unidades].

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0}$$ → Impedancia de salida, con entrada en corto [Ω].

Con la condición $V_1 = 0$ se tiene el circuito siguiente:



$$I_1 = -J_1$$

Calculando J_1 por el método de mallas:

$Z_{11} = 21$

$Z_{22} = 26$

$Z_{33} = 25$

$Z_{12} = -16$

$Z_{13} = 5$

$Z_{23} = 10$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -16 & 5 \\ V_2 & 26 & 10 \\ 0 & 10 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 21 & -16 & 5 \\ -16 & 26 & 10 \\ 5 & 10 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{450 V_2}{2900}$$

Por lo que $I_1 = \dfrac{-45}{290} V_2$

Para obtener I_2 calculamos Z'_{eq}:

$$Z'_{eq} = (16 \| 5 + 10) \| 10 = \frac{29}{5}$$

$$I_2 = \frac{5}{29} V_2$$

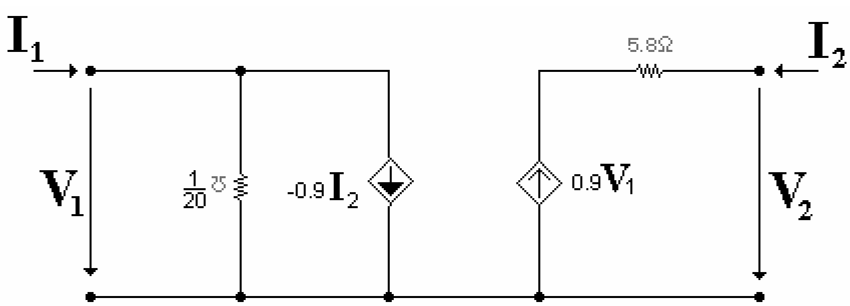
Sustituyendo en g_{12}

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-\frac{45}{290} V_2}{\frac{5}{29} V_2} = \frac{-45x29}{5x290} = -\frac{45}{50} = -\frac{9}{10}$$

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} = \frac{V_2}{\frac{5}{29} V_2} = \frac{29}{5}\,\Omega$$

Se cumple que $g_{21} = -g_{12}$ (red puramente pasiva).

El circuito equivalente de la red dada es:



Red pasiva (contiene fuentes aparentes).

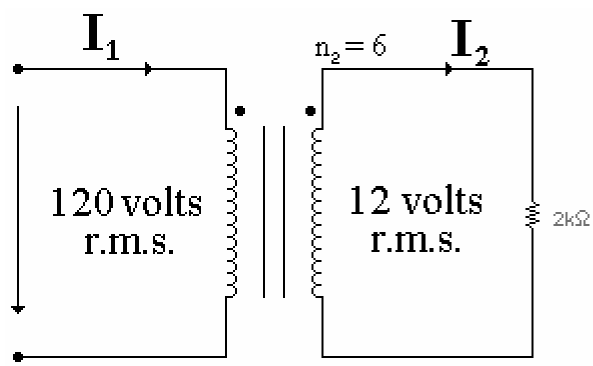
Las ecuaciones en su forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -0.9 \\ 0.9 & 5.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 14

En el circuito mostrado, que contiene un transformador ideal, encuentre:

a) La relación de transformación ***N***.
b) La impedancia de entrada $\boldsymbol{Z_e}$.
c) La corriente de salida $\boldsymbol{I_2}$.
d) La corriente de entrada $\boldsymbol{I_1}$.
e) La potencia de entrada $\boldsymbol{P_1}$ y la potencia de salida $\boldsymbol{P_2}$.



Solución:

a)

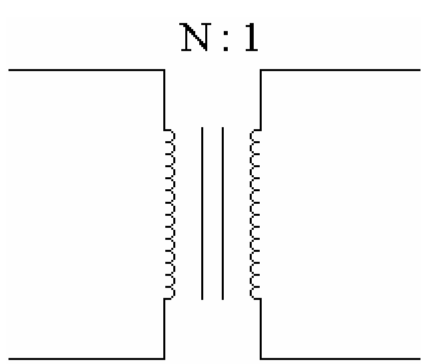
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} \therefore n_1 = \frac{n_2 V_1}{V_2} = \frac{6x120}{12} = 60$$

$n_1 = 60$ vueltas.

y la relación de transformación vale

$$\mathrm{N} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{60}{6} = 10$$

La relación de transformación en un transformador se denota como se muestra:



Esto indica, en nuestro caso, que por cada 10 vueltas en el primario, en el secundario se tendrá una vuelta (transformador reductor o de bajada).

b) La impedancia de entrada se calcula de

$$Z_e = N^2 Z_s$$

$$Z_e = (10)^2(2x10^3) = 200 \quad k\Omega$$

c) La corriente de salida I_2 es

$$I_2 = \frac{12}{2000} = 6\text{x}10^{-3} = 6 \quad mA$$

d) La corriente de entrada es

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} \therefore I_1 = \frac{n_2}{n_1} I_2 = \frac{6}{60}\left(6x10^{-3}\right)$$

$$I_1 = 0.6 \quad mA$$

En este problema no hemos incluido el signo negativo en la ecuación de corrientes $I_1 = -\frac{1}{N} I_2$ del transformador, ya que I_2 aparece en sentido contrario al del símbolo convenido para el transformador.

Nótese que la corriente de entrada I_1 también pudo calcularse por la ley de Ohm en el circuito primario como

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_e} = \frac{120}{200 \quad k\Omega} = 0.6x10^{-3} = 0.6 \quad mA$$

por lo que I_1 depende de la impedancia reflejada en el primario del transformador.

Asimismo, se observa que si el voltaje se redujo 10 veces (N=10) en el secundario del transformador, la corriente de salida aumentó en la misma proporción y la potencia de entrada es igual a la potencia de salida.

e)

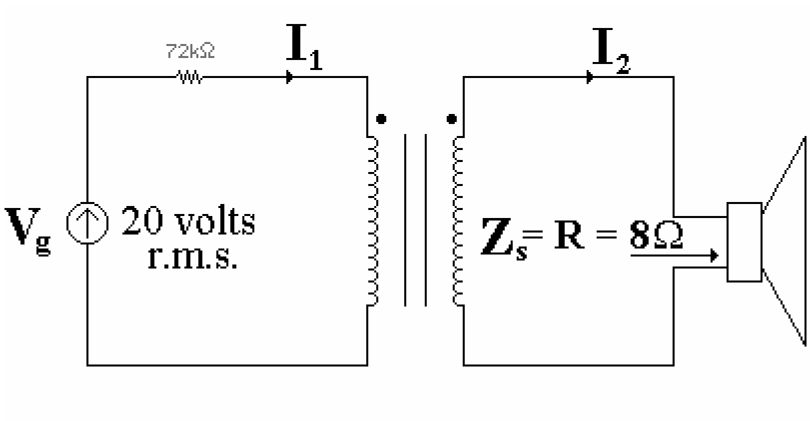
$$P_1 = V_1 I_1 = (120)(0.6x10^{-3}) = 72 \quad mW$$

$$P_2 = V_2 I_2 = (12)(6x10^{-3}) = 72 \quad mW$$

y $P_1 = P_2$

PROBLEMA 15

En el circuito dado, encuentre la relación de transformación ***N*** que debe tener el transformador para suministrar la máxima potencia al altavoz y determine dicha potencia si su impedancia es de 8Ω.



Solución:

Por el teorema de la máxima transferencia de potencia, ésta se tendrá cuando la resistencia reflejada en el primario del transformador (carga) sea igual a la resistencia de Thévenin, en este caso de 72Ω.

En el transformador ideal se tiene que

$Z_e = N^2 Z_s$ siendo $N = \dfrac{n_1}{n_2}$

Así $72 = N^2 x 8$

$\therefore N^2 = \dfrac{72}{8} = 9$

y la relación de transformación es $N = 3$.

La corriente I_1 valdrá:

$$I_1 = \frac{20}{144} \ \textit{amp.}$$

El voltaje V_1 (voltaje en el primario del transformador) es, por tanto:

$$V_1 = 72I_1 = 72\left(\frac{20}{144}\right) = 10 \quad volts$$

De la relación de voltajes del transformador ideal dada por

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{N}$$

obtenemos $V_2 = \frac{V_1}{N} = \frac{10}{3} \quad volts$

La corriente I_2 valdrá:

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_s} = \frac{V_2}{8} = \frac{\frac{10}{3}}{8} = \frac{5}{12} \quad amp.$$

$$I^2 = \frac{25}{144}$$

y la potencia máxima transferida al altavoz es

$$P_{max} = R\left|I\right|^2 = 8\left(\frac{25}{144}\right) = \frac{200}{144}$$

$$P_{max} = 1.38 \quad watts$$

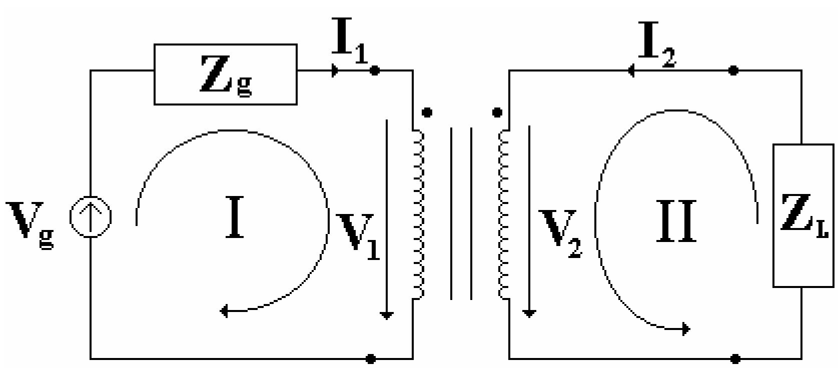
Se observa que la fuente entrega una potencia

$$P_f = V\,I_1 = 20\left(\frac{20}{144}\right) = 2.77 \quad watts$$

de los cuales 1.38 watts se disipan en la resistencia interna de la fuente y 1.38 watts se entregan a la carga, que es la potencia que se transfiere a la bocina, como ya se había calculado.

PROBLEMA 16

En el circuito mostrado obtenga la expresión para calcular V_2 en función de las impedancias Z_g y Z_L para una V_g dada.



Solución:

Método 1. Las ecuaciones del transformador son:

$$V_1 = NV_2 \therefore V_2 = \frac{V_1}{N} \text{.....................(1)}$$

$$I_1 = -\frac{1}{N} I_2 \therefore I_2 = -N I_1 \text{.............(2)}$$

De la malla I:

$$Z_g I_1 + V_1 - V_g = 0$$
$$\therefore V_g = Z_g I_1 + V_1 \text{............(3)}$$

De la malla II:

$$V_2 + I_2 Z_L = 0$$
$$\therefore V_2 = -I_2 Z_L \text{..................(4)}$$

Sustituyendo (1) y (2) en (4) obtenemos

$$\frac{V_1}{N} = -I_2 Z_L = -(-N\ I_1) Z_L$$

$$o\ \ V_1 = N^2 I_1 Z_L$$

y sustituyendo esta expresión en (3):

$$V_g = Z_g I_1 + N^2 I_1 Z_L = (Z_g + N^2 Z_L) I_1$$

La impedancia vista desde la fuente V_g es:

$$\frac{V_g}{I_1} = Z_g + N^2 Z_L$$

El término $Z_L N^2$ es la "impedancia reflejada" en el primario del transformador (Z_e).

De la ecuación anterior,

$$I_1 = \frac{V_g}{Z_g + N^2 Z_L} \text{..............................(5)}$$

$$Así,\ \ de\ \ (4)\ \ y\ \ (2):$$

$$V_2 = -Z_L I_2 = -Z_L(-N\ I_1)$$

$$V_2 = N\ Z_L I_1$$

y sustituyendo (5) en esta última ecuación:

$$V_2 = \frac{N\ Z_L}{Z_g + N^2 Z_L} V_g$$

Método 2.

Malla I: $Z_g I_1 + V_1 = V_g$..................(1)

Malla II: $Z_L I_2 + V_2 = 0$.....................(2)

Ecuaciones del transformador: $\begin{cases} V_1 = N\ V_2 \text{..........................(3)} \\ I_1 = -\dfrac{1}{N} I_2 \text{.........................(4)} \end{cases}$

Sustituyendo (3) y (4) en (1):

$$Z_g\left(-\frac{1}{N} I_2\right) + N\ V_2 = V_g \text{........................}(A)$$

$$Z_L I_2 + V_2 = 0 \text{...}(B)$$

resolviendo (A) y (B) para V_2 por determinantes:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{Z_g}{N} & V_g \\ Z_L & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\dfrac{Z_g}{N} & N \\ Z_L & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{Z_L V_g}{-\dfrac{Z_g}{N} - N\ Z_L} = \frac{-Z_L V_g}{\dfrac{-Z_g - N^2 Z_L}{N}}$$

$$V_2 = \frac{N\ Z_L}{Z_g + N^2 Z_L} V_g$$

PROBLEMA 17

A partir de las ecuaciones de un cuadripolo con parámetros ***Z*** deduzca las expresiones que permitan calcular:

a) Los parámetros ***Y*** en función de los parámetros ***Z***.
b) Los parámetros ***Z*** en función de los parámetros ***h***.

Solución:

a)

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \text{..................}(1)$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \text{..................}(2)$$

En las ecuaciones anteriores despejamos a I_1 e I_2:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} \\ V_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{22} V_1}{\Delta} - \frac{Z_{12} V_2}{\Delta}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 \\ Z_{21} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{11} V_2}{\Delta} - \frac{Z_{21} V_1}{\Delta}$$

Las ecuaciones para un cuadripolo con parámetros ***Y*** son:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Comparando la I_1 calculada, con la ecuación (3) se obtiene

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta}$$

$$Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta}$$

Comparando la I_2 calculada, con la ecuación (4) se obtiene

$$Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta} \qquad (Z_{21} = Z_{12})$$
$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta}$$

Con los resultados anteriores se da respuesta al inciso ***a)***; sin embargo, podemos obtener una expresión general para el propósito buscado haciendo las siguientes consideraciones.

Del determinante general de Z vemos que $Z_{22} = cof\ Z_{11}$, $\quad -Z_{12} = cof\ Z_{12}$ y $Z_{11} = cof\ Z_{22}$. Sustituyendo estos parámetros en Y_{11}, Y_{12} y Y_{22} se obtiene:

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta} = \frac{cof\ Z_{11}}{\Delta}$$
$$Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta} = \frac{cof\ Z_{12}}{\Delta}$$
$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta} = \frac{cof\ Z_{22}}{\Delta}$$

Las expresiones anteriores permiten establecer que

$$Y_{n,p} = \frac{cof\ Z_{p,n}}{\Delta_Z} \qquad (\Delta_Z = \Delta = |Z|)$$

b) Las ecuaciones para un cuadripolo con parámetros híbridos son:

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \text{................}(5)$$
$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \text{................}(6)$$

De las ecuaciones anteriores despejamos a I_1:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & h_{12} \\ I_2 & h_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{22} V_1}{\Delta_h} - \frac{h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

y

$$\frac{h_{22} V_1}{\Delta_h} = I_1 + \frac{h_{12} I_2}{\Delta_h}$$

o

$$V_1 = \frac{\Delta_h}{h_{22}} I_i + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2$$

Comparando la V_1 calculada, con la ecuación (1) dada por

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

se obtiene

$$Z_{11} = \frac{\Delta_h}{h_{22}}$$

$$Z_{12} = \frac{h_{12}}{h_{22}}$$

De las ecuaciones (5) y (6) despejamos a V_2:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} h_{11} & V_1 \\ h_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} = \frac{h_{11} I_2}{\Delta_h} - \frac{h_{21} V_1}{\Delta_h}$$

Sustituyendo V_1 en la ecuación anterior:

$$V_2 = \frac{h_{11} I_2}{\Delta_h} - \frac{h_{21}}{\Delta_h}\left(\frac{\Delta_h}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2\right) = \left(\frac{h_{11}}{\Delta_h} - \frac{h_{21} h_{12}}{\Delta_h h_{22}}\right) I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1$$

$$V_2 = \left(\frac{h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}}{\Delta_h h_{22}}\right) I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1$$

pero $h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12} = \Delta_h$, así que

$$V_2 = \frac{\Delta_h}{\Delta_h h_{22}} I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1$$

$$V_2 = \frac{1}{h_{22}} I_2 - \frac{h_{21}}{h_{22}} I_1$$

Comparando la V_2 calculada, con la ecuación (2) dada por

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

se obtiene

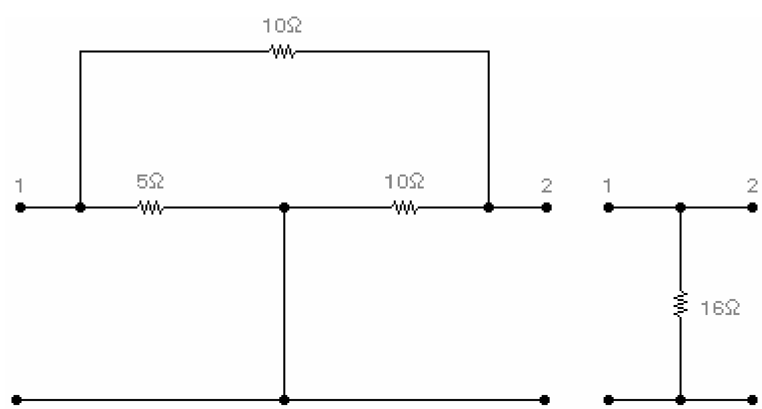
$$Z_{21} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} \qquad\qquad (h_{12} = -h_{21})$$

$$Z_{22} = \frac{1}{h_{22}}$$

Hemos expresado los parámetros ***Y*** en términos de los parámetros ***Z*** y éstos, a su vez, en términos de los parámetros ***h***; es posible la conversión de un tipo de parámetros en otro cualquiera, existiendo tablas elaboradas que facilitan dicha conversión.

PROBLEMA 18

Caracterice cada una de las siguientes redes por sus ecuaciones con parámetros de circuito abierto, conéctelas en serie y escriba las ecuaciones del cuadripolo resultante.



RED "A" RED "B"

Solución:

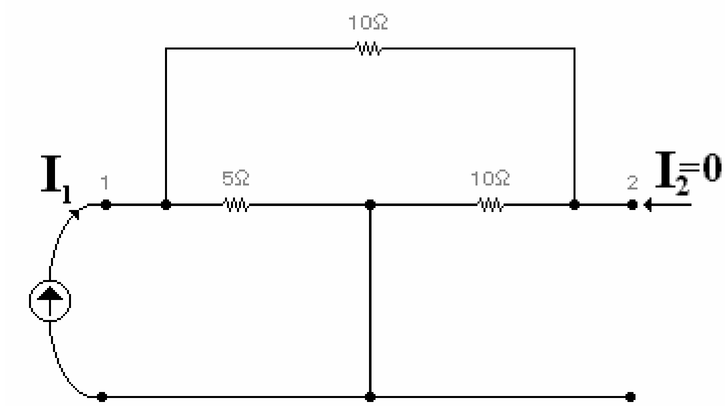
Las ecuaciones del cuadripolo resultante o equivalente pueden obtenerse al conocer los parámetros individuales de cada red, razón por la que caracterizaremos cada una de ellas.

Las ecuaciones con parámetros de circuito abierto son:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

RED "A"

Con I_2=0:



Por reducción serie-paralelo:

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{\left(\frac{20x5}{20+5}\right)I_1}{I_1} = 4\Omega$$

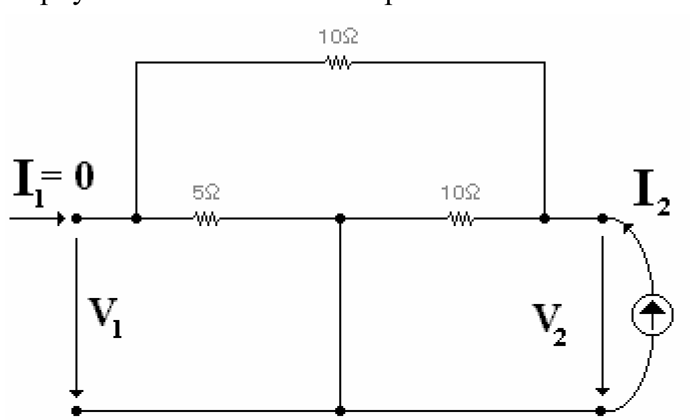
$$V_2 = 10\,I_k$$

Para calcular I_k emplearemos divisor de corriente.

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{10\,I_k}{I_1} = \frac{10\left(\frac{5\,I_1}{25}\right)}{I_1} = 2\Omega$$

Por ser red recíproca $Z_{21} = Z_{12} = 2\Omega$.

Para calcular Z_{22} nos apoyaremos en la red correspondiente:



Por reducción serie-paralelo:

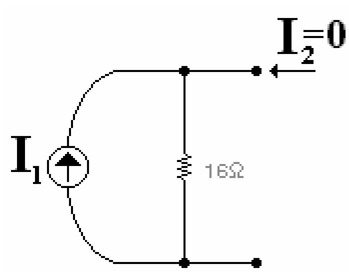
$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\frac{15x10}{25} I_2}{I_2} = 6\Omega$$

Así, para la RED "A"

$$V_1 = 4I_1 + 2I_2$$
$$V_2 = 2I_1 + 6I_2$$

<u>RED "B"</u>

Con I_2=0:



$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{16 I_1}{I_1} = 16\Omega$$

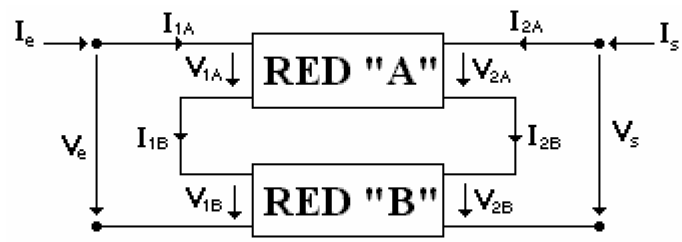
$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{16 I_1}{I_1} = 16\Omega = Z_{12}$$

Siendo la red simétrica se tiene que $Z_{22} = Z_{11} = 16\Omega$.

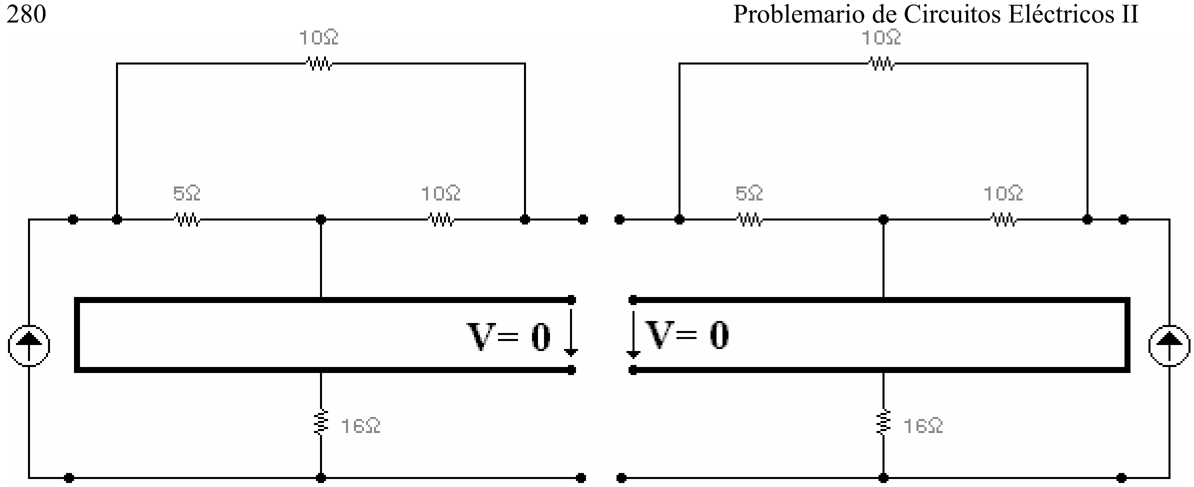
Así, para la RED "B"

$$V_1 = 16I_1 + 16I_2$$
$$V_2 = 16I_1 + 16I_2$$

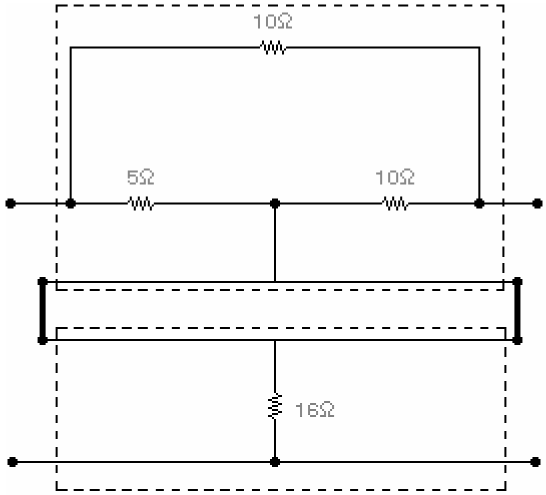
La conexión de dos cuadripolos en SERIE se ilustra en la siguiente figura:



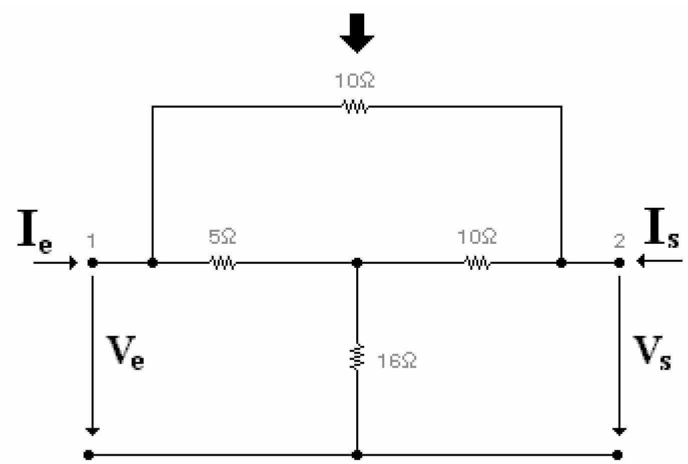
La prueba de validez de Otto Brune debe satisfacerse para que ambas redes puedan conectarse directamente sin necesidad de un transformador de relación 1:1. En las siguientes figuras la terminal común se visualiza con línea gruesa, cumpliéndose en ambos casos la condición $V = 0$ que se requiere.



Por lo que la conexión en SERIE de ambas redes es:



De los resultados obtenidos anteriormente establecemos:



RED "A": $$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

RED "B": $$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

La matriz general de impedancia para circuitos de dos puertos conectados en SERIE es <u>la suma</u> de sus matrices de impedancia individuales.

Por lo tanto

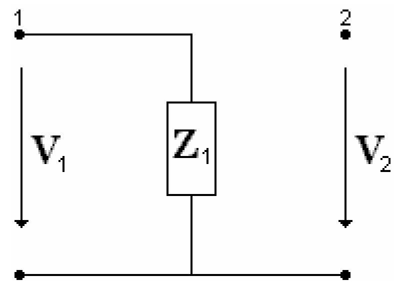
$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+16 & 2+16 \\ 2+16 & 6+16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix}$$

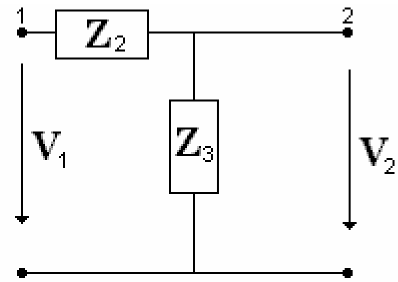
y las ecuaciones del cuadripolo resultante son:

$$V_e = 20I_e + 18I_s$$
$$V_s = 18I_e + 22I_s$$

PROBLEMA 19

En cada una de las siguientes estructuras de dos puertos calcule los parámetros de corto circuito, conecte ambas estructuras en paralelo y escriba las ecuaciones del cuadripolo resultante.





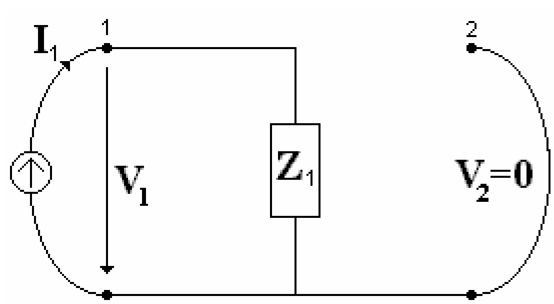
RED “A” RED “B”

Solución:

Las ecuaciones con parámetros de corto circuito son:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$
$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

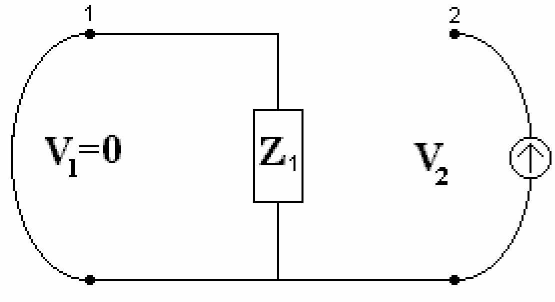
<u>RED “A”</u>. El circuito correspondiente para $V_2 = 0$ es:



$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{Z_1} V_1}{V_1} = \frac{1}{Z_1} \; mhos$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{0}{V_1} = 0 \quad mhos$$

Para la condición $V_1 = 0$ se tendrá el siguiente circuito:

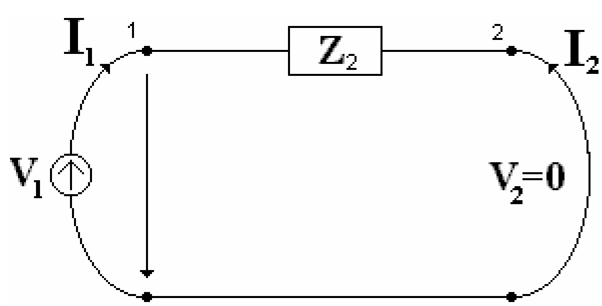


$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{0}{V_2} = 0 \quad mhos$$

Cumpliéndose que $Y_{21} = Y_{12}$

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{0}{V_2} = 0 \quad mhos$$

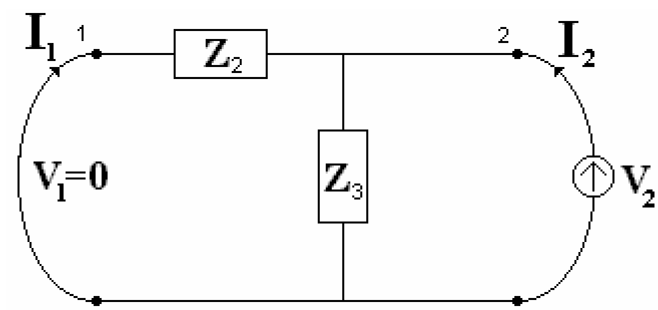
<u>RED "B"</u>. Con $V_2 = 0$:



$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\frac{1}{Z_2}V_1}{V_1} = \frac{1}{Z_2}\, mhos$$

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-\frac{1}{Z_2}V_1}{V_1} = -\frac{1}{Z_2}$$

Con $V_1 = 0$:

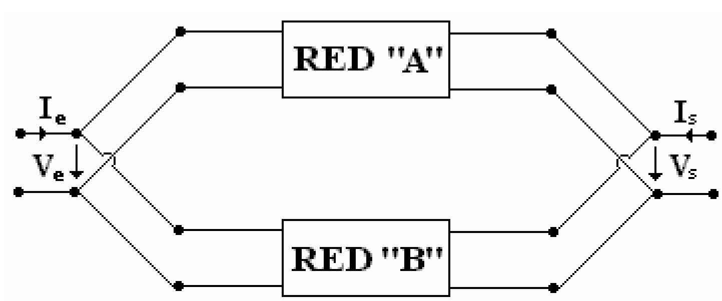


$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-\dfrac{1}{Z_2}V_2}{V_2} = -\frac{1}{Z_2}\,mhos$$

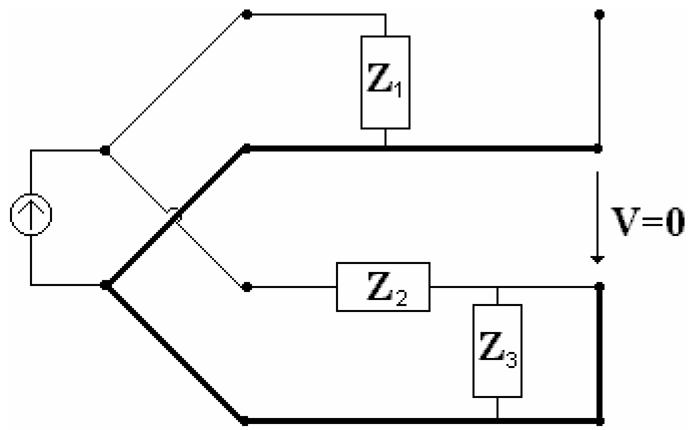
Por ser recíproca la red se ve que $Y_{21} = Y_{12}$.

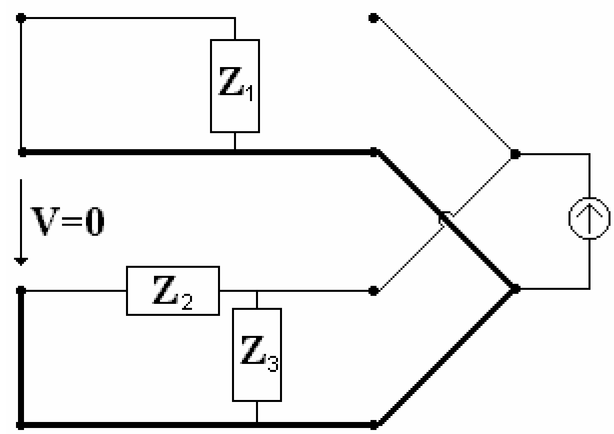
$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{\dfrac{Z_2+Z_3}{Z_2 Z_3}V_2}{V_2} = \frac{Z_2+Z_3}{Z_2 Z_3}$$

La conexión de dos cuadripolos en paralelo se ilustra en la siguiente figura:

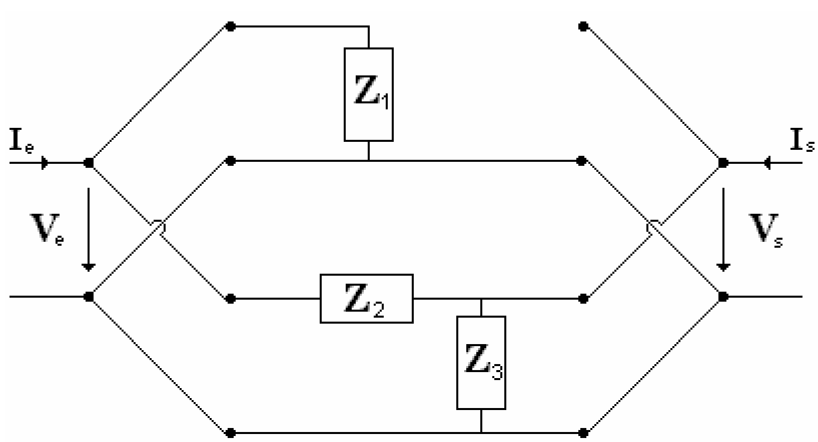


Al conectar en paralelo las dos redes dadas se satisface la prueba de validez de Brune, según se muestra:

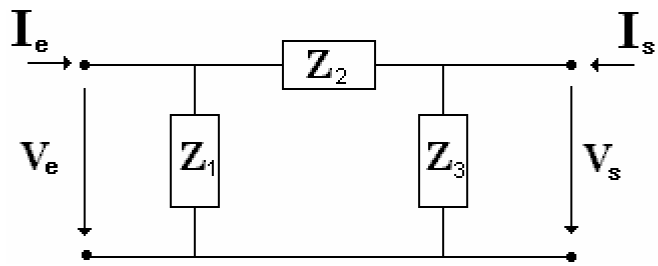




Lo anterior permite conectar directamente las redes sin necesidad de un transformador ideal, como sigue:



Esta conexión es la misma que se muestra en la siguiente figura:



De los resultados obtenidos anteriormente establecemos:

RED “A”: $$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

RED “B”: $$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

La matriz general de admitancia para circuitos de dos puertos conectados en paralelo es <u>la suma</u> de sus matrices de admitancia individuales.

Por lo tanto

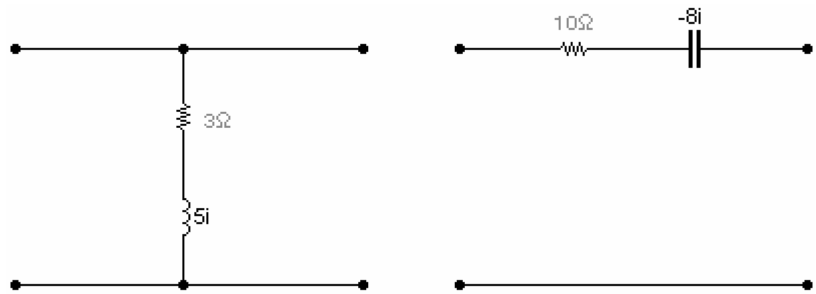
$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_s \end{bmatrix}$$

Finalmente, las ecuaciones del cuadripolo resultante son:

$$I_e = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) V_e + \left(-\frac{1}{Z_2} \right) V_s$$
$$I_s = \left(-\frac{1}{Z_2} \right) V_e + \left(\frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \right) V_s$$

PROBLEMA 20

Conecte en cascada las dos redes que se muestran y obtenga las ecuaciones con parámetros de transmisión directos del cuadripolo resultante.

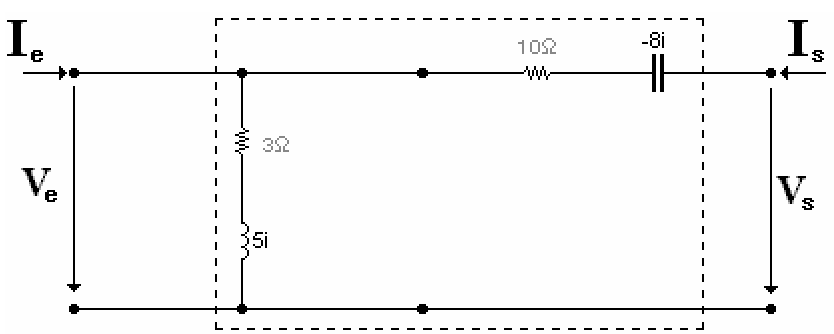


RED "A" RED "B"

Solución:

Dos cuadripolos se conectan en cascada cuando el puerto de salida de uno se une directamente al puerto de entrada del otro.

En nuestro caso, la red resultante es:



Las ecuaciones del cuadripolo resultante o equivalente pueden obtenerse al conocer los parámetros individuales de cada red, razón por la que caracterizaremos cada una de ellas.

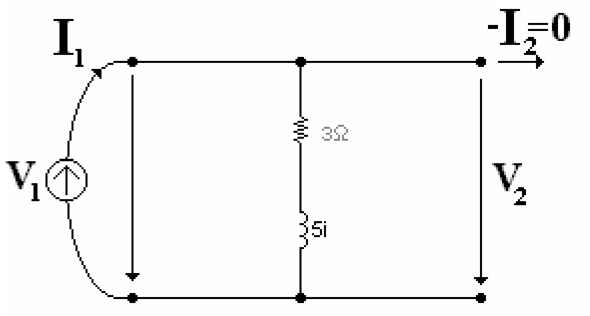
Las ecuaciones con parámetros de transmisión directos son:

$$V_1 = AV_2 + B(-I_2)$$

$$I_1 = CV_2 + D(-I_2)$$

RED "A"

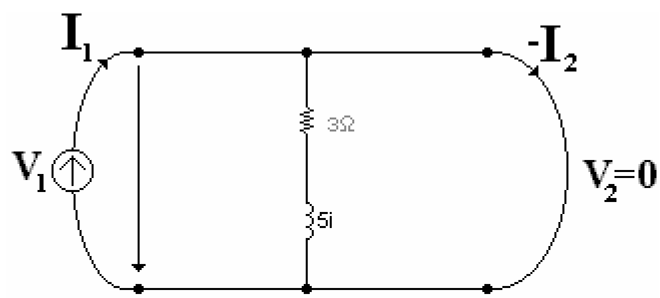
Con la condición $-I_2 = 0$ se tiene:



$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = 1 \qquad (V_1 = V_2)$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = \frac{\left(\frac{1}{3+5i}\right)V_2}{V_2} = \frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{34} \quad mhos$$

Para la condición $V_2 = 0$ el circuito es:



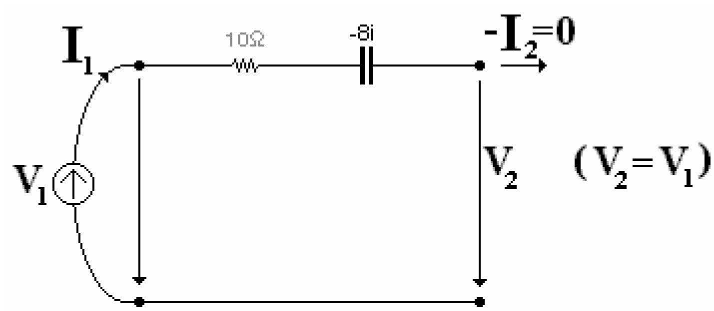
Se observa que $-I_2 = I_1 = \infty$.

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{V_1}{\infty} = 0$$

$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = 1$$

RED "B"

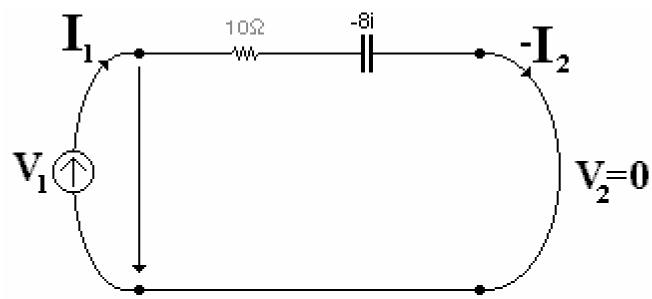
Con la condición $-I_2 = 0$:



$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = 1$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0} = \frac{0}{V_2} = 0$$

Para la condición $V_2 = 0$ el circuito es:



Se observa que $I_1 = -I_2$

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{(10-8i)(-I_2)}{-I_2} = 10-8i \quad \Omega$$

$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = 1$$

Las ecuaciones matriciales para cada red son:

RED "A" $\left\{ \begin{bmatrix} V_{1A} \\ I_{1A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3-5i}{34} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2A} \\ -I_{2A} \end{bmatrix} \right.$

RED "B" $\left\{ \begin{bmatrix} V_{1B} \\ I_{1B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10-8i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2B} \\ -I_{2B} \end{bmatrix} \right.$

La matriz de transmisión general para dos cuadripolos conectados en cascada es el producto matricial de sus matrices individuales de transmisión, multiplicadas en el orden natural, esto es, el primer factor es el cuadripolo de entrada. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3-5i}{34} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10-8i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10-8i \\ \frac{3-5i}{34} & \frac{24-74i}{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ -I_s \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones del cuadripolo resultante son:

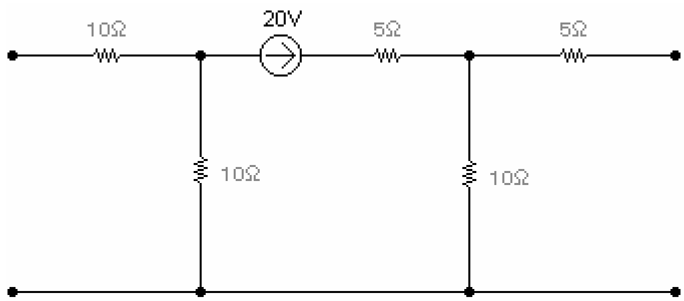
$$V_e = (1)V_s + (10-8i)(-I_s)$$
$$I_e = \left(\frac{3-5i}{34}\right)V_s + \left(\frac{24-74i}{34}\right)(-I_s)$$

Si se desea calcular los parámetros directamente de la red resultante, se obtendrán los mismos resultados (ver problema núm. 8 de este capítulo).

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

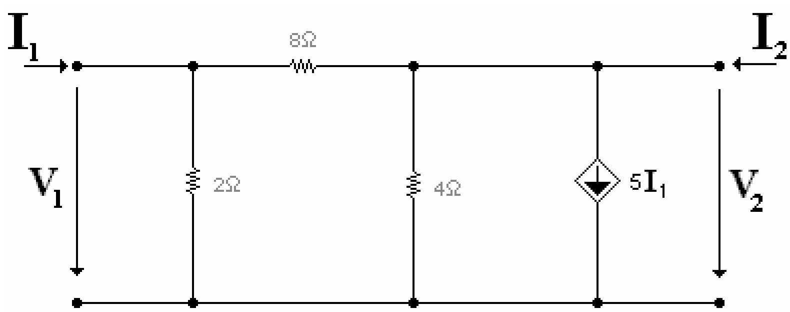
PROBLEMA 1

Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de circuito abierto y obtenga sus circuitos equivalentes en ***V*** y en ***T***.



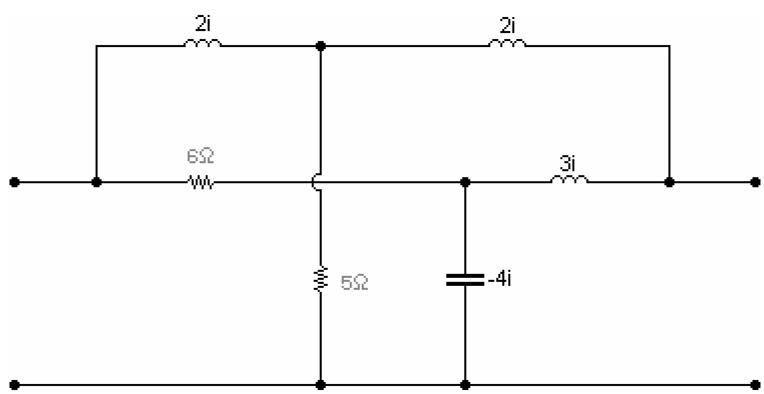
PROBLEMA 2

En la red mostrada, que contiene una fuente de corriente controlada por corriente, calcule los parámetros de circuito abierto.



PROBLEMA 3

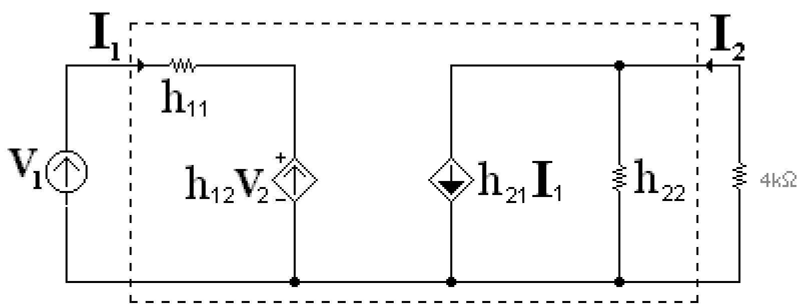
Caracterice la siguiente red por sus ecuaciones con parámetros de corto circuito.



.

PROBLEMA 4

En el circuito equivalente de un transistor con parámetros híbridos directos que se muestra, determine la ganancia en corriente $\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$, la ganancia en voltaje $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ y la impedancia de entrada (Z_{ent}).



Transistor

Datos:

$h_{11} = 1\ k\Omega$

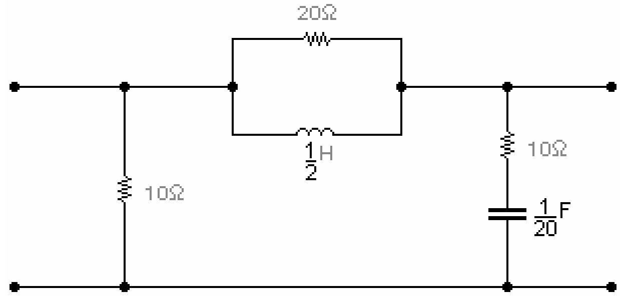
$h_{12} = 2.5x10^{-4}$

$h_{21} = 40$

$h_{22} = 50\ \mu mhos$

PROBLEMA 5

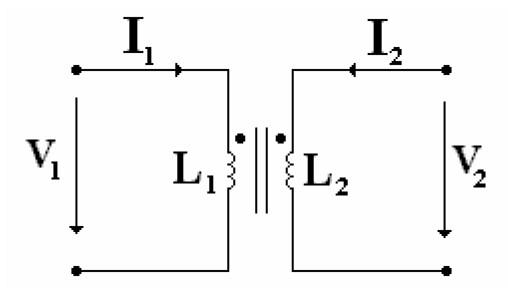
Calcule los parámetros híbridos directos de la red mostrada y obtenga su circuito equivalente, a la frecuencia ω=10 *rad/seg.*



.

PROBLEMA 6

A partir de las ecuaciones de un cuadripolo con parámetros de transmisión directos y considerando las características físicas que definen al transformador ideal deduzca las ecuaciones de este dispositivo, cuyo símbolo se muestra en la figura.



PROBLEMA 7

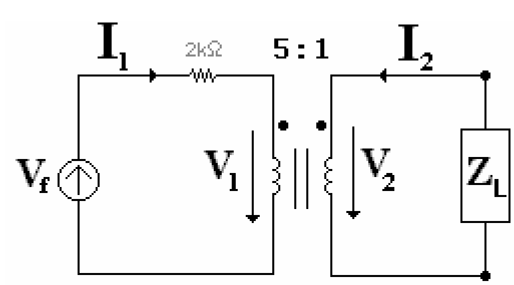
En el circuito que se muestra, Z_L = 100–50*i*. Calcule la potencia media o activa entregada a Z_L si

a) $I_2 = 3\angle 60°$ *amp.*

b) $V_2 = 80\angle 30°$ *volts*

c) $I_1 = 2\angle 20°$ *amp.*

d) $V_f = 1000\angle 0°$ *volts*



.

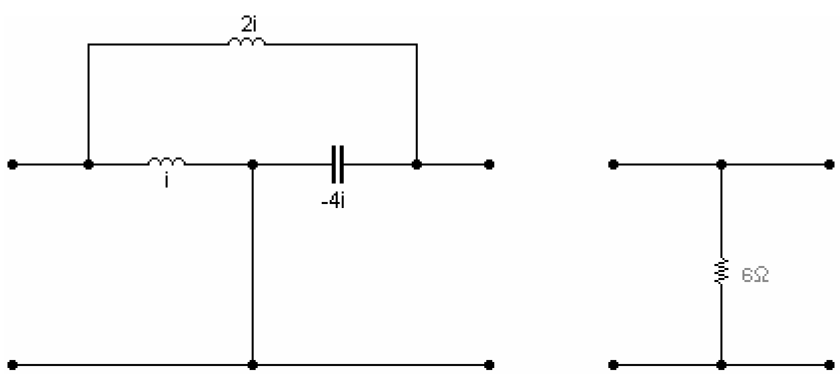
PROBLEMA 8

A partir de las ecuaciones de un cuadripolo con parámetros ***Y*** deduzca las expresiones que permitan calcular:

a) Los parámetros ***Z*** en función de los parámetros ***Y***.
b) Los parámetros ***Y*** en función de los parámetros ***h***.

PROBLEMA 9

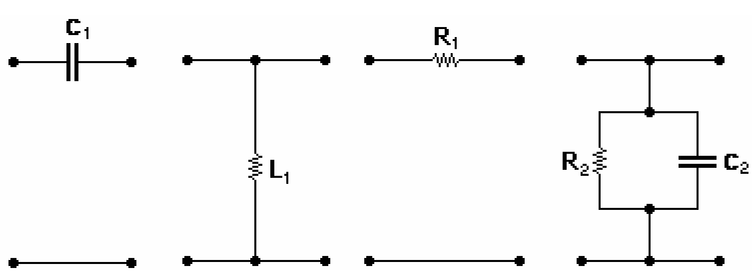
En cada una de las siguientes estructuras de dos puertos calcule los parámetros de circuito abierto, conecte ambas estructuras en serie y obtenga las ecuaciones del cuadripolo resultante.



RED "A" **RED "B"**

PROBLEMA 10

Conecte en cascada las redes dadas y escriba las ecuaciones con parámetros de transmisión directos del cuadripolo resultante.



BIBLIOGRAFÍA

Bustamante Llaca, Enrique, *Modern Analysis of Alternating Current Networks*, vol. I y II, Limusa-Wiley, S.A.

Jiménez Garza Ramos, Fernando, *Problemas de Teoría de los Circuitos*, vol. I y II, Limusa-Noriega Editores, S.A.

Jiménez Garza Ramos, Fernando, *Análisis de Circuitos Eléctricos*, Limusa-Noriega Editores, S.A.

Edminister, Joseph A., *Circuitos Eléctricos*, Serie Schaum McGraw-Hill.

Boylestad, Robert L, *Análisis Introductorio de Circuitos,* Pearson Educación.

Hayt, William H. y Kemmerly, Jack E., *Análisis de Circuitos en Ingeniería*, McGraw-Hill.

Benítez Serrano, Ismael, *Circuitos Eléctricos*, vol. I y II.

Johnson, David E. y Hilburn, John L., *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*, Prentice Hall.

Gerez Greiser, Víctor y Murray-Lasso, M. A., *Teoría de Sistemas y Circuitos*, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.

Bobrow, L. S., *Análisis de Circuitos Eléctricos,* Interamericana, S.A., de C.V.

Nilson, James W. y Riedel, Susan A., *Circuitos Eléctricos*, Pearson Educación.

Van Valkenburg, M. E., *Análisis de Redes*, Limusa, S.A.

Hsu, Hwei P, *Análisis de Fourier*, Pearson Educación.

Cheng, David K., *Analysis of Linear Systems*, Addison-Wesley.

García Talavera, Guillermo, *Teoría de los circuitos,* vol. I, II, III, IV, Instituto Politécnico Nacional.

García Talavera, Guillermo, *Problemas y Soluciones de Técnicas de Telecomunicaciones*, Limusa-Noriega Editores, S.A.

Bogdanov, E. I., *Problemas de Circuitos Eléctricos de Corriente Alterna*, Limusa-Noriega Editores, S.A.

Dorf, Richard C., *Circuitos Eléctricos-Introducción al Análisis y Diseño*, Alfaomega, S.A., de C.V.

Hubert, Charles I., *Circuitos Eléctricos CA/CC Enfoque Integrado*, McGraw-Hill.

Tocci, R. J., *Circuitos y Dispositivos Electrónicos*, Interamericana S.A., de C.V.

.

Impreso en los Talleres Gráficos de la
Dirección de Publicaciones del
Instituto Politécnico Nacional
Tresguerras 27, Centro Histórico, México, DF
Noviembre de 2004. Edición: 1 000 ejemplares

FORMACIÓN: Armando Acosta Alavez
DISEÑO DE PORTADA: Gerardo López Padilla
CORRECCIÓN Y SUPERVISIÓN: Manuel Toral Azuela
PROCESOS EDITORIALES: Manuel Gutiérrez Oropeza
PRODUCCIÓN: Martha Varela Michel
DIVISIÓN EDITORIAL: Jesús Espinosa Morales
DIRECTOR: Arturo Salcido Beltrán